ORSAY
Série A
N° d'ordre
1182

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Gérard di BONA

THEORIE CINETIQUE STOCHASTIQUE DE L'INTERACTION D'UN PLASMA D'ELECTRONS AVEC UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Soutenue le 29 octobre 1973, devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	J. YVON	Examinateurs
	R. BALESCU	
	P. GUILLANEUX	
	Y. FURUTANI	

ORSAY
Série A
N° d'ordre
1182

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Gérard di BONA

THEORIE CINETIQUE STOCHASTIQUE DE L'INTERACTION D'UN PLASMA D'ELECTRONS AVEC UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Soutenue le 29 octobre 1973, devant la Commission d'Examen

MM.	J.L. DELCROIX	Président
	J. YVON	Examinateurs
	R. BALESCU	
	P. GUILLANEUX	
	Y. FURUTANI	

UNIV.
LEIDEN
DEL.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée au Service de Physique Générale du Commissariat à l'Energie Atomique avec l'aide d'une bourse attribuée par l'Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires. Je remercie MM. F. DELOBEAU et G. LIDIN de m'avoir accueilli dans leur service et de m'avoir donné tous les moyens nécessaires à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie très vivement M. le Professeur J.L. DELCROIX, Directeur du Laboratoire de Physique des Plasmas, pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse et pour avoir accepté d'en présider le Jury.

J'exprime ma profonde gratitude à M. le Professeur J. YVON, Haut-Commissaire à l'Energie Atomique, qui tout au long de ce travail en a suivi les développements et m'a donné de nombreux conseils au cours des entretiens qu'il a bien voulu m'accorder.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. le Professeur R. BALESCU de l'Université Libre de Bruxelles qui, avec beaucoup de gentillesse, a bien voulu prendre en considération ce travail et a accepté d'être membre du jury.

Je remercie également MM. C. DEUTSCH, Y. FURUTANI et J. PEYRAUD qui ont accepté de lire cette thèse et en on fait un examen critique qui en a permis l'amélioration.

Je suis heureux d'exprimer toute ma reconnaissance à M. P. GUILLANEUX, Chef de la Section Théorie Documentation et Calcul, qui m'a orienté vers ce travail et dont les conseils et les suggestions en ont permis les développements. Qu'il trouve dans l'aboutissement de celui-ci une manifestation de l'excellent climat de confiance et d'amitié qu'il a su créé parmi ses chercheurs. J'en profite pour remercier tous mes collègues et principalement M. D. COLOMBANT pour de fructueuses discussions.

Ce travail est le fruit d'une étroite collaboration avec C. MASSELOT. Qu'il trouve ici mes plus sincères remerciements pour ces années de recherche en commun durant lesquelles j'ai eu le plaisir d'avoir pu l'apprécier comme collègue et comme ami.

Je remercie Mmes E. BONIFACIO et A. SERVAIS, et Mlle S. MALTESTE pour le soin qu'elles ont apporté à la présentation de ce mémoire.

Je tiens à dédier ce travail à mes Parents sans qui cette thèse n'aurait pas été possible et à ma femme pour son soutien et sa patience durant la rédaction de cette thèse.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548020_0009

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

I - INTRODUCTION

II - METHODE DE STRATONOVICH

II.1 - Rappel de notions de probabilité
II.1.1 - Variables et processus aléatoires
II.1.2 - Fonction de répartition-densité de probabilité
II.1.3 - Espérance mathématique-moments et moyennes
II.1.4 - Fonction caractéristique
II.1.5 - Densité de probabilité à plusieurs dimensions
II.1.6 - Corrélations entre des variables aléatoires

II.2 - Méthode de STRATONOVICH généralisée

III - PLASMA D'ELECTRON : HIERARCHIE DES EQUATIONS D'EVOLUTION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

III.1 - Introduction

III.2 - Densités de probabilité et fonctions de distribution

III.3 - Hiérarchie des équations d'évolution pour les fonctions de distribution
III.3.1 - Solution du système $\dot{\xi} = F^{\circ}(\xi,t)$
III.3.2 - Changement de variables
III.3.3 - Equation de STRATONOVICH
III.3.4 - Transformation inverse
III.3.5 - Hiérarchie des équations d'évolution pour les fonctions de distribution

IV - PLASMA D'ELECTRON : EQUATIONS CINETIQUES

IV.1 - Introduction

IV.2 - Equation de f_1 : équation de FOKKER-PLANCK généralisée

IV.3 - Equation de $\delta g_{1/1}$

IV.4 - Equations cinétiques
IV.4.1 - Cas A_1 : champ extérieur faible ; couplage faible
IV.4.2 - Cas A_2 : champ extérieur faible ; forces à longues portées
IV.4.3 - Cas B : champ extérieur intense

V - CONCLUSION

ANNEXE I

ANNEXE II - PLASMA ELECTRONS-IONS

A.II.1 - Terme de friction par polarisation

A.II.2 - Densité spectrale des fluctuations de densité et termes de diffusion

A.II.3 - Approximation $m_i \to \infty$

ANNEXE III

REFERENCES.

THEORIE CINETIQUE STOCHASTIQUE DE L'INTERACTION D'UN PLASMA D'ELECTRONS AVEC UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Chapitre I

INTRODUCTION

Parmi les divers processus qui pourraient permettre de réaliser la fusion contrôlée, un certain nombre de physiciens se sont intéressés, au cours de ces dernières années, aux plasmas créés par laser.

D'un point de vue théorique, l'interaction d'un laser à forte puissance avec un plasma pose un certain nombre de problèmes. Le premier qui se présente est de savoir quel modèle il faut utiliser pour décrire le milieu et quelle sera l'équation cinétique qui par la suite pourra permettre de connaître les grandeurs macroscopiques mesurables telles que densité, pression ou température qui sont directement reliées à la fonction de distribution à une particule.

Cependant, avant de commencer une telle étude, il nous faut trouver quelles sont les caractéristiques essentielles de cette interaction. Nous allons utiliser comme base, pour cela, les résultats du modèle hydrodynamique de MM. C. FAUQUIGNON et F. FLOUX [1], [2] et [3], pour l'interaction d'un faisceau laser sur une cible de deutérium solide. Ce modèle nous propose le diagramme température-densité représenté par la figure 1.

On peut remarquer sur le diagramme les trois zones du plasma créé par laser. C'est au voisinage de la densité de coupure

$$n_c = \frac{m\,\omega_o^2}{4\pi e^2} \qquad \begin{matrix}(\omega_o = \text{fréquence laser}) \\ (m = \text{masse de l'électron})\end{matrix}$$

que se situent les phénomènes d'interaction les plus intéressants du point de vue du chauffage. C'est à partir de cette densité ($n_c = 10^{21}$ e/cm^3 pour un laser au néodyme) que l'onde laser ne pourra plus se propager et c'est au voisinage de n_c que l'on a le maximum de température (de l'ordre de quelques centaines d'électrons-volts). C'est donc cette zone que nous choisissons d'étudier.

Afin de mieux situer dans notre esprit la place qu'occupe un tel plasma vis-à-vis des autres, nous allons l'inscrire dans le diagramme densité-température proposé par J.L. DELCROIX [4] (voir figure 2). Nous constatons alors que nous sommes en présence d'un plasma non-relativiste, non-quantique et que le paramètre :

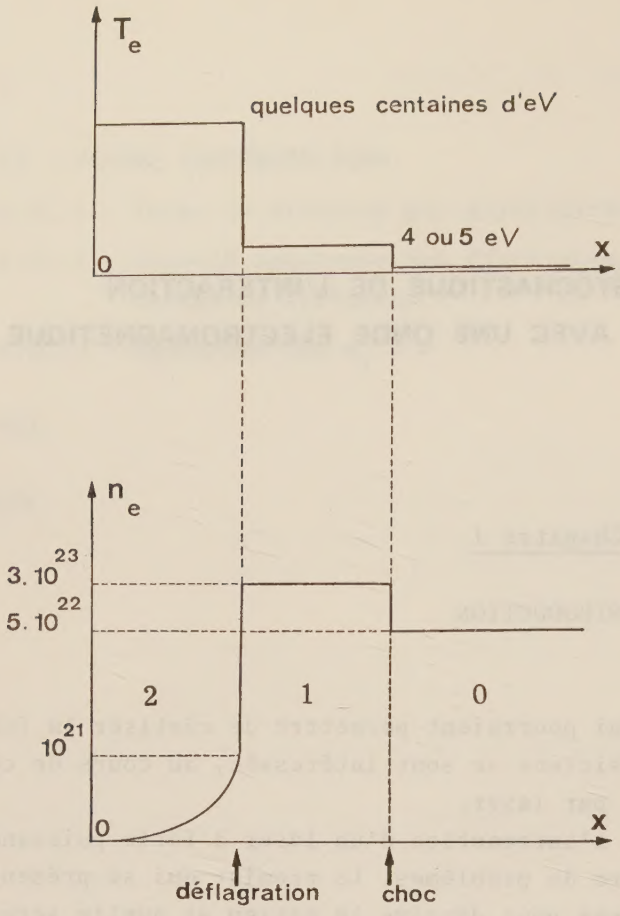


Figure 1

0 - zone non perturbée

1 - zone sous choc

2 - plasma en détente

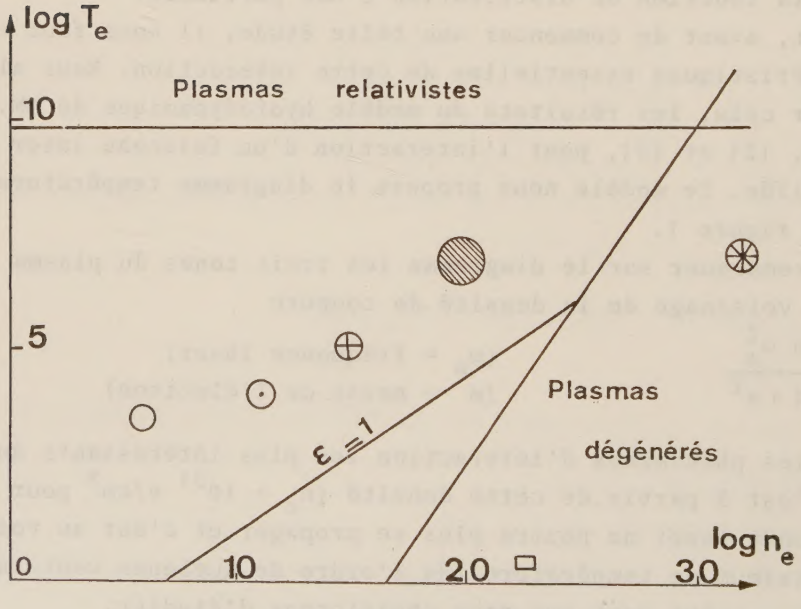


Figure 2

- ◯ ionosphère couche F
- ⊙ décharge gazeuse à faible intensité
- ⊕ décharge gazeuse à forte intensité
- ⊛ intérieur des naines blanches
- ▨ cas étudié ici
- ▭ électrons dans les métaux

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n_o \lambda_D^3}$$

est inférieur à l'unité. Ce paramètre ε_1 est l'inverse du nombre de particules dans une sphère de DEBYE de rayon λ_D et c'est le paramètre qui sert habituellement à briser la hiérarchie B.B.G.K.Y. en l'absence de champ extérieur ou en présence d'un champ extérieur faible [5],[6]. Dans la formule ci-dessus n_o représente la densité du plasma.

Examinons maintenant pour terminer le diagramme de la figure 3 qui représente le rapport :

$$\frac{KT}{W_E}$$

en fonction de l'intensité du champ électrique de l'onde laser. Ici KT représente l'énergie thermique d'un électron et :

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m \omega_o^2}$$

est l'énergie d'un électron dans l'onde extérieure. (E_o est l'amplitude maximale de l'onde électrique extérieure).

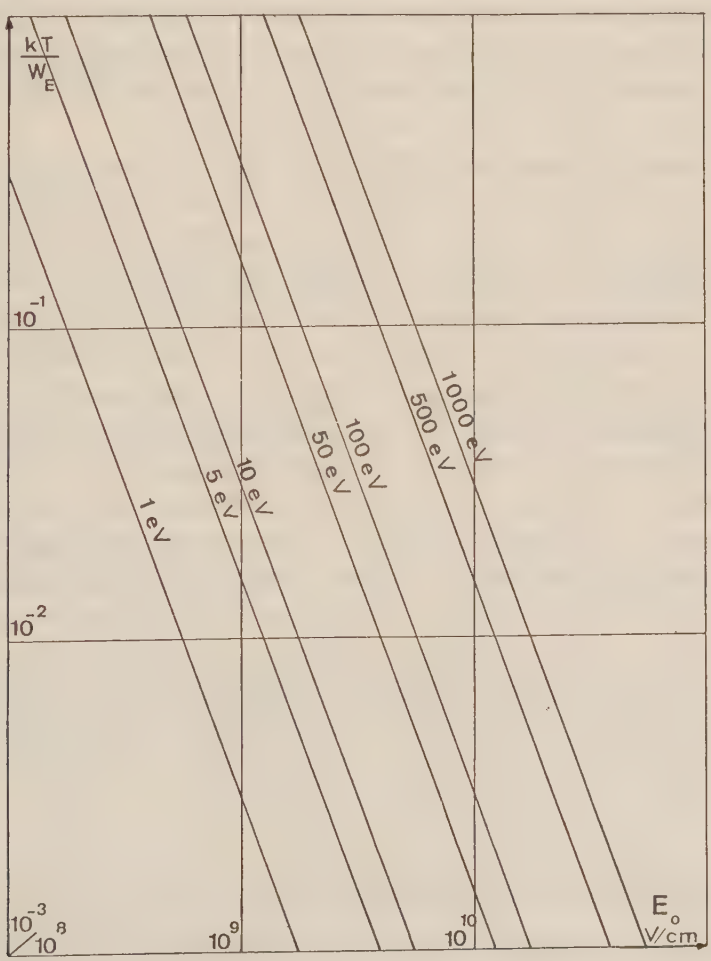


Figure 3

Le rapport KT/W_E devient petit devant l'unité pour des intensités supérieures à 10^9 V/cm et pour des températures de l'ordre de quelques centaines d'électrons-volts comme nous l'avons supposé dans notre plasma. Compte tenu de la technologie actuelle de telles intensités ne sont pas une utopie car elles correspondent à un laser d'une puissance de 1 GW focalisé sur 10μ par exemple. Cette catégorie de laser de puissance impose donc dans le domaine étudié que :

$$\frac{KT}{W_E} << 1$$

et c'est cette condition que nous utiliserons pour caractériser l'onde électromagnétique extérieure intense.

Maintenant que nous venons de préciser les grandeurs caractéristiques du milieu que nous étudions, nous allons revenir au problème que nous nous posons et qui est de trouver l'équation cinétique qui convient pour ce milieu.

Un certain nombre de physiciens s'est déjà penché sur des problèmes similaires en utilisant la théorie cinétique et en suivant essentiellement deux voies : certains, [7] à [10], partent de l'équation de VLASSOV en négligeant les corrélations entre les particules ; d'autres, [11] et [12], utilisent la hiérarchie B.B.G.K.Y. pour calculer la conductivité non-linéaire du plasma. Mais toutes ces théories, à l'exception de celle de SILIN [11], sont valables pour des champs extérieurs modérément forts. D'autre part, pour ces calculs de conductivité, il est suffisant de prendre les corrélations à un seul temps ; mais si l'on veut calculer des termes tels que par exemple les densités spectrales des fluctuations de densité, il est nécessaire de connaître les fonctions de corrélations à deux temps non-stationnaires. Pour obtenir de telles quantités, il serait possible de partir de la hiérarchie B.B.G.K.Y. à deux temps de ROSTOKER [13].

Cependant, comme le remarque MEERON [14], aucune des équations de transport habituelles (BOLTZMANN, FOKKER-PLANCK, VLASSOV) ne peuvent convenir en présence d'un champ intense à cause des effets fortement non-linéaires qui peuvent se produire. MEERON souligne aussi, et c'est là le point qui nous paraît le plus important, que, dans un champ intense, les particules du plasma sont beaucoup plus couplées au champ qu'aux autres particules et que le mouvement de chaque particule dépend beaucoup plus de l'intensité et de la direction du champ que de son interaction avec les autres particules du milieu. C'est pour cette raison que nous avons préféré adopter pour notre étude une méthode stochastique qui, dès le point de départ (équations du mouvement de chaque particule) a l'avantage de bien séparer la force déterministe qui provient du champ extérieur intense de celle qui émane des interactions entre les particules et que l'on peut considérer comme stochastique et faible.

Cette méthode est celle de STRATONOVICH [15] modifiée par SO [16] et OGUNLANA [17], et qui permet de trouver les équations d'évolution des densités de probabilités simples ou conditionnelles en partant d'une équation stochastique du type :

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \varepsilon F(x,t)$$

où ε est un petit paramètre de développement. (voir chapitre II).

Les modifications apportées par SO et OGUNLANA sont de deux sortes :

- ils ont tout d abord tenu compte de la corrélation possible entre la force F, et la distribution initiale de la variable x, ce qui est très important dans le cas où F dérive de potentiels coulombiens.

- ils ont ensuite généralisé la méthode au cas d'une équation du type :

$$\dot{x} = F^\circ (x,t) + \varepsilon F(x,t)$$

où F° est une "force" déterministe.

A partir de cette méthode, SO a retrouvé suivant les valeurs du paramètre ε et dans le cas d'un plasma sans champ extérieur, les équations habituelles de FOKKER-PLANCK (gaz modérément dense - couplage faible) et BALESCU-LENARD (plasma dominé par des forces à longues portées).

Nous avons donc, pour notre part, choisi d'appliquer cette théorie à l'interaction d'un plasma avec une onde électromagnétique intense. Mais le domaine étudié ainsi que la méthode utilisée étant relativement nouveaux, il est apparu nécessaire de limiter le problème, pour commencer, à l'étude d'un plasma d'électrons où les ions sont supposés former un fond uniforme destiné à assurer la neutralité du milieu. Toutefois, la méthode de SO et OGUNLANA s'appliquant quelle que soit l'importance de la force déterministe F°, il nous a paru intéressant de donner tout au long de cette étude et en parallèle, les résultats concernant un champ électromagnétique extérieur faible et ceux pour un champ intense.

En résumé, ce sont donc les équations cinétiques d'un plasma d'électrons en présence d'un champ électromagnétique extérieur quelconque que nous nous proposons de chercher, avec malgré tout comme motivation première et comme but de cette étude l'équation cinétique d'un plasma d'électrons en interaction avec un champ intense

Au cours du chapitre III, nous donnons des précisions sur les trois cas que nous étudions en parallèle :

Cas A_1 : Champ extérieur faible - gaz modérément dense et couplage faible.
Les grandeurs caractéristiques sont la distance moyenne interparticulaire et la vitesse thermique.

Cas A_2 : Champ extérieur faible - plasmas - forces à longues portées.
Les grandeurs caractéristiques sont la longueur de DEBYE et la vitesse thermique.

Cas B : Champ extérieur intense.
Les grandeurs caractéristiques sont l'amplitude et la vitesse maximales de l'électron dans l'onde extérieure.

La valeur du paramètre ε qui caractérise la petitesse de la force stochastique est alors précisée pour chacun des trois cas. En utilisant la méthode de STRATONOVICH-SO-OGUNLANA nous aboutissons à une hiérarchie d'équations d'évolution pour les fonctions de distribution à une particule, simple ou conditionnelle.

Cette chaîne d'équations est brisée en utilisant des développements des fonctions de distributions en fonction du petit paramètre sans dimension ε (chapitre IV). Nous obtenons alors un système de deux équations couplées gouvernant la fonction de distribution à une particule et la fonction de distribution à une

particule conditionnée par une autre. Il est à noter que la première de ces équations a la forme d'une équation de FOKKER-PLANCK généralisée. Nous avons ensuite calculé, après un changement de variables approprié et des transformations de FOURIER-LAPLACE, le terme de friction par polarisation, les densités spectrales des fluctuations de densité et le terme de diffusion.

Ce terme de diffusion, dans le cas B, avait déjà été calculé [18], en première approximation, sans résoudre le système d'équations couplées. Ce coefficient de diffusion approché, calculé notamment en utilisant des techniques de coupures, nous donnait un coefficient semblable par la forme à celui de CHANDRASEKHAR [19] (voir annexe I). Cependant par la suite [20] à [22], et c'est ce que nous développons dans ce mémoire, nous avons pu résoudre le système d'équations couplées et calculer directement le terme de diffusion car l'écrantage dynamique apparaît naturellement dans nos équations au moyen des fonctions de distribution conditionnelles et non par l'introduction de considérations physiques comme dans l'équation de FOKKER-PLANCK normale [23].

Finalement, à partir des termes de friction et de diffusion, nous obtenons les équations cinétiques cherchées. Il est à noter que dans les cas A_1 et A_2, nous retrouvons respectivement les équations de FOKKER-PLANCK et de BALESCU-LENARD lorsque $E_o \to 0$.

Chapitre II

METHODE DE STRATONOVICH

Nous allons, dans ce chapitre, retracer la méthode de STRATONOVICH [15] modifiée par SO [16] et OGUNLANA [17]. C'est cette méthode que nous utiliserons dans les deux chapitres suivants pour traiter les problèmes que nous nous sommes posés.

Considérons un système décrit par l'équation de fluctuation :

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \varepsilon F(x,t) \qquad (2.1)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$.
Dans ce problème, nous supposons que la force F ainsi que la valeur initiale X_0 sont aléatoires, et que ε est un petit paramètre.

Dans la méthode proposée par STRATONOVICH [15], il n'est pas tenu compte d'une corrélation éventuelle entre la force et la distribution initiale de x. Or, lorsque l'on veut traiter des problèmes où la force F dérive de potentiels coulombiens et doit être calculée de manière self-consistante, il est nécessaire de tenir compte de ces corrélations. C'est pour cette raison que SO [16] et OGUNLANA [17] ont dû généraliser la méthode de STRATONOVICH et c'est cette généralisation que nous présentons ici. Mais avant cela, nous allons rappeler quelques notions élémentaires de probabilité.

II.1 - RAPPEL DE NOTIONS DE PROBABILITE

II.1.1 - Variables et processus aléatoires

Une variable aléatoire ou stochastique est une quantité qui peut prendre une valeur au hasard parmi toute une collection bien déterminée avec une certaine probabilité. Cette collection s'appelle "l'ensemble fondamental". Deux cas sont à distinguer :

- l'ensemble fondamental est discret,
- l'ensemble fondamental est continu.

Les définitions qui vont suivre ne seront données que dans le cas continu.

On peut définir intuitivement un processus aléatoire comme étant n'importe quel processus probabiliste, c'est-à-dire n'importe quel processus qui se développe au cours du temps et qui est contrôlé par des lois de probabilité. D'une manière plus précise, nous définirons un processus stochastique comme étant une famille de variables aléatoires :

$$\{x_t,\ t \in T\}$$

où x_t est l'observation au temps t du phénomène et T le domaine de temps étudié. En fait, un processus aléatoire est complètement défini par la suite des distributions de probabilités :

. $f_1(x,t)\,dx$: probabilité de trouver x dans l'intervalle (x,x+dx) au temps t.

. $f_2(x_1,t_1;\ x_2,t_2)\,dx_1\,dx_2$: probabilité de trouver x_1 dans l'intervalle $(x_1,\ x_1+dx_1)$ au temps t_1 et x_2 dans $(x_2,\ x_2+dx_2)$ à t_2.

. etc...

II.1.2 - Fonction de répartition - Densité de probabilité

Considérons la probabilité P(X < x) que la variable aléatoire X est une valeur inférieure à x. Alors la fonction :

$$F(x) = \text{Prob}\ (X < x) \qquad (2.2)$$

est appelée fonction de répartition. Sa dérivée, si elle existe, est nommée densité de probabilité. Soit f(x) cette dérivée, on appelle loi élémentaire du processus la quantité f(x) dx qui correspond à la probabilité que la variable aléatoire soit dans l'intervalle (x, x+dx).

On a évidemment :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

II.1.3 - Espérance mathématique - Moments et moyennes

Si X est une distribution continue ayant pour densité f(x), alors :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = m \qquad (2.3)$$

est appelée "espérance mathématique" de X (ou valeur moyenne, ou moment du premier ordre). On trouve aussi la notation suivante :

$$E(X) = \langle X \rangle$$

pour désigner cette espérance.
De la même manière, on peut définir des moments d'ordre k par :

$$m_k = E(X^k) \qquad (2.4)$$

On dira qu'une variable aléatoire est centrée si sa moyenne est nulle ; il en est ainsi par exemple pour la variable (X-m). Le moment d'ordre k de cette variable est appelé moment centré d'ordre k :

$$\mu_k = E\{(X-m)^k\} \qquad (2.5)$$

Le moment centré le plus important est celui du deuxième ordre (Variance) :

$$\mu_2 = E\{(X-m)^2\} = m_2 - m^2 \qquad (2.6)$$

$\sigma = \sqrt{\mu_2}$ est appelé "écart type".

Notons brièvement la signification des deux premiers moments en utilisant le vocabulaire de mécanique :

- le moment d'ordre un localise le centre de gravité de la densité qui peut être regardée comme une distribution de masse sur un fil, la masse totale étant l'unité.

- Le moment centré d'ordre deux étant le moment d'inertie de la distribution de masse autour du centre de masse.

II.1.4 - Fonction caractéristique

C'est par définition, la fonction :

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx \qquad (2.7)$$

ce qui correspond à la transformée de FOURIER de la densité. Cette fonction est très intéressante, car elle permet de trouver les moments grâce au théorème suivant:

Théorème : Si le moment d'ordre k de la variable aléatoire X existe, la fonction caractéristique $\phi_X(t)$ a une dérivée d'ordre k continue en t et qui pour t = 0 vaut $(i)^k m_k$.

La réciproque n'est vraie que pour les ordres pairs seulement.

Notons que la somme de variables aléatoires indépendantes Z = X + Y conduit à la fonction caractéristique :

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

Il est parfois utile d'introduire une deuxième fonction caractéristique :

$$\psi_X(t) = \text{Log } \phi_X(t) \qquad (2.8)$$

Si $\phi_X(t)$ est développable au voisinage de t = 0, on a :

$$\phi_X(t) = 1 + itm_1 + \frac{(it)^2}{2\,!} m_2 + \ldots = 1 + A \qquad (2.9)$$

alors :

$$\psi_X(t) = \text{Log}(1+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{A^n}{n}$$

ce qui donne :

$$\psi_X(t) = it\, k_1 + \frac{(it)^2}{2\,!} k_2 + \ldots + \frac{(it)^n}{n\,!} k_n \qquad (2.10)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} k_1 = m_1 \\ k_2 = m_2 - m_1^2 = \mu_2 \\ k_3 = \mu_3 \\ k_4 = \mu_4 - 3\,\mu_2^2 \\ \text{etc...} \end{cases} \qquad (2.11)$$

Les coefficients k sont appelés "cumulants" ou "semi-invariants".

- "Cumulants" car si $\{k'_i\}$ et $\{k''_i\}$ sont les cumulants de 2 variables aléatoires indépendantes X et Y, alors les cumulants de Z = X + Y sont $k_i = k'_i + k''_i$, $\forall i$.
- "Semi-invariants" car si on effectue un changement d'échelle Z = X + a/n, on trouve comme nouveaux coefficients :

$$k'_1 = k_1 + a/n,\ k'_2 = k_2/n,\ \ldots,\ k'_j = k_j/n.$$

II.1.5 - Densité de probabilité à plusieurs dimensions

Nous nous limiterons, pour simplifier les notations, à deux dimensions, l'extension à n - dimensions étant immédiate.

Soit le couple aléatoire (X,Y), on définit sa fonction de répartition par :

$$F(x,y) = \text{Prob}\ \{X < x,\ Y < y\}$$

La fonction $A(x) = F(x, \infty)$ est la fonction de répartition de X, elle définit la "loi marginale" de X. De la même manière, $B(y) = F(\infty, y)$ est la fonction de répartition de Y.

F(x, y) définit également toutes les lois conditionnelles telles que, par exemple, la loi de Y sachant que $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$ dont la fonction de répartition est :

$$B_{x_1 x_2}(y) = \text{Prob}\ \{Y < y / x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \frac{F(x_2,y) - F(x_1,y)}{A(x_2) - A(x_1)}$$

Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si toutes ces lois conditionnelles sont identiques aux lois marginales, ce qui implique que :

$$F(x,y) = A(x)\ .\ B(y)$$

Si la densité existe, alors elle est définie par :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Quant aux lois marginales élémentaires, elles s'écrivent :

$$a(x)\ dx = \frac{\partial F(x,\infty)}{\partial x}\ dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy$$

$$b(y)\ dy = \frac{\partial F(\infty,y)}{\partial y}\ dy = dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$

Pour des variables aléatoires indépendantes, nous pouvons écrire :

$$f(x,y) = a(x).b(y)$$

Enfin, pour les lois conditionnelles, citons par exemple la loi élémentaire de Y sachant que X = x :

$$b(y/X=x)\ dy = \frac{f(x,y)\ dy}{a(x)}$$

II.1.6 - Corrélations entre des variables aléatoires

Tout comme nous l'avons fait pour les variables aléatoires simples, nous allons maintenant définir les moments pour des couples de variables.

On appelle moment d'ordre h en X et k en Y, s'il existe :

$$m_{hk} = E(X^h, Y^k) = \iint x^h \, y^k \, f(x,y) \, dx \, dy$$

On a notamment :

$$m_{10} = m_x \qquad m_{01} = m_y$$
$$m_{20} = E(X^2) \qquad m_{02} = E(Y^2)$$

Si l'on utilise les variables centrées :

$$X_1 = X - E(X)$$
$$Y_1 = Y - E(Y)$$

on obtient les moments centrés, comme par exemple :

$$\mu_{20} = \sigma_x^2 \qquad \mu_{11} = E(X_1, Y_1)$$
$$= E(XY) - E(X)\,E(Y)$$
$$\mu_{02} = \sigma_y^2$$

Le coefficient μ_{11} est appelé "covariance" ou "corrélation croisée", ou "corrélation double". Enfin, on nomme "coefficient de corrélation" de X et Y le rapport :

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

Par la suite, on notera :

$$\mu_{11} = K[X,Y] \qquad (2.13)$$

De la même façon, étant donné trois variables aléatoires X, Y, Z on pourra construire la corrélation triple K [X,Y,Z] qui décrit la dépendance entre les trois variables X, Y, Z.

Dans le cas de processus aléatoire, les corrélations vont dépendre du temps et ainsi le processus sera caractérisé par la suite de fonctions de corrélations :

$$k_1(t_1), \quad k_2(t_1,t_2), \quad k_3(t_1,t_2,t_3)$$

qui sont définies à partir des corrélations multiples :

$$k_r(t_1,\ldots t_r) = K\,[X_1(t_1),\ldots,X_r(t_r)]$$

considérées comme des fonctions du temps.

Nous nous sommes bornés dans ce paragraphe II.1 à faire un rappel rapide, et par là même très superficiel, des quelques définitions de statistiques dont nous aurons besoin par la suite. Une étude plus élaborée peut être faite à l'aide des nombreux ouvrages traitant ces questions. Nous ne citerons ici que ceux que nous avons consultés pour rédiger ce paragraphe : DOOB [25], GIRAUD [27], LUMLEY [26], STRATONOVICH [15], TORTRAT [27].

II.2 - METHODE DE STRATONOVICH GENERALISEE

Nous allons maintenant revenir à la méthode de STRATONOVICH modifiée par SO et OGUNLANA.

L'équation de départ est :

$$\dot{x} = \varepsilon F(x,t) \tag{2.14}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_o$. Posons :

$$Z = x(t) - x_o = \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \ldots \tag{2.15}$$

ce qui donne en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{Z} = \dot{x} = \varepsilon F(x,t) = \varepsilon \dot{Z}_1 + \varepsilon^2 \dot{Z}_2 + \ldots$$

Développons maintenant $F(x,t)$ en série de TAYLOR :

$$\varepsilon F(x,t) = \varepsilon F(x_o,t) + \varepsilon \frac{\partial F(x_o,t)}{\partial x} \left[\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \ldots \right] \tag{2.16}$$

En identifiant les deux développements ci-dessus, on obtient :

$$\dot{Z}_1 = F(x_o,t) \quad \rightarrow \quad Z_1(x_o,t) = \int_o^t F(x_o,t')\, dt'$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\partial F(x_o,t)}{\partial x} Z_1 \rightarrow Z_2(x_o,t) = \int_o^t dt'' \frac{\partial F(x_o,t'')}{\partial x} \int_o^{t''} F(x_o,t')\, dt' \tag{2.17}$$

etc...

Si Z et Y représentent deux variables aléatoires, notons $D_{Z(t)}(z)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z(t)$ et $D_{Z(t)}(z/Y=y)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z(t)$ sachant que $Y = y$.

Comme nous l'avons fait en (2.7), pour une seule variable, nous pouvons définir, pour un couple de variables aléatoires, une fonction caractéristique conditionnelle $\phi_Z(u/Y=y)$:

$$\phi_Z(u/Y=y) = \langle e^{iuZ}/Y=y \rangle = \int e^{iuz} D_Z(Z/Y=y)\, dz \tag{2.18}$$

et l'on aura un développement analogue au développement (2.9) :

$$\phi_Z(u/Y=y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \langle Z^n/Y=y \rangle \tag{2.19}$$

En considérant (2.18) comme la transformée de FOURIER de $D_Z(z/Y=y)$, on obtient par transformation inverse :

$$\begin{aligned} D_Z(z/Y=y) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iuz} \phi_Z(u/Y=y)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iuz} \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \langle Z^n/Y=y \rangle \right| du \\ &= \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \langle Z^n/Y=y \rangle \right| \delta(z) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si $Z = X - Y$

On a : $$D_X(x/Y=y) = D_Z(x-y/Y=y)$$

Moyennons sur Y dans (2.20), on obtient :

$$D_X(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \frac{\partial}{\partial x}\right)^n <Z^n/Y=x> \right] D_Y(x)$$

Posons alors :

$X = X(t)$ $\qquad$ $D_X(x) = D(x,t)$

$Y = X(o)$ $\qquad$ $D_Y(y) = D(y,o)$

On obtient :

$$D(x,t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \frac{\partial}{\partial x}\right)^n <Z^n/X(o)=x> \right] D(x,o)$$

$$= (1+L)\, D(x,o)$$

$$1 + L = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \frac{\partial}{\partial x}\right)^n <Z^n/X(o) = x> \qquad (2.21)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} D(x,t) = \dot{L}\, D(x,o) = \dot{L}(1+L)^{-1}\, D(x,t) \qquad (2.22)$$

où l'opérateur $$(1+L)^{-1} = 1 - L + L^2 - L^3 + \ldots \qquad (2.23)$$

est l'inverse de l'opérateur $1 + L$.

L'équation (2.22) est l'équation stochastique que nous cherchons. L'opérateur $\dot{L}(1+L)^{-1}$ peut être calculé à l'aide des développements (2.15), (2.21) et (2.23) par rapport aux puissances de ε.

STRATONOVICH note que si la différence $(t-t_o)$ augmente (ici $t_o = 0$), les séries (2.15), (2.21) et (2.23) ne sont plus convergentes mais que par contre la série $\dot{L}\,(1+L)^{-1}$ reste convergente et a pour limite une série indépendante du temps initial t_o.

Comme $Z = \varepsilon\, Z_1 + \varepsilon^2\, Z_2$, on a d'après (2.21) à l'ordre 2 en ε :

$$\dot{L} = - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} <\dot{Z}_1/X(o) = x> - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} <\dot{Z}_2/X(o) = x>$$

$$+ \varepsilon^2 \left(- \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 <\dot{Z}_1\, Z_1/X(o) = x > + o(\varepsilon^3) \qquad (2.24)$$

et

$$(1+L)^{-1} = 1 - L + o(\varepsilon^2)$$

$$= 1 - \varepsilon\left(- \frac{\partial}{\partial x}\right) <Z_1/X(o) = x> + o(\varepsilon^2) \qquad (2.25)$$

En combinant (2.24) et (2.25), nous obtenons :

$$\dot{L}(1+L)^{-1} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} <\dot{Z}_1/X(o)=x> - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} <\dot{Z}_2/X(o)=x>$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 < \dot{Z}_1 \, Z_1/X(o)=x >$$

$$- \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\dot{Z}_1/X(o)=x> \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) < Z_1/X(o)=x> + o(\varepsilon^3)$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)<\varepsilon \dot{Z}_1 + \varepsilon^2 \dot{Z}_2/X(o)=x > + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 <\varepsilon^2 \dot{Z}_1 \, Z_1/X(o)=x>$$

$$- \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\varepsilon\dot{Z}_1/X(o)=x> <\varepsilon Z_1/X(o)=x>$$

$$+ \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\varepsilon\dot{Z}_1/X(o)=x> \right] <\varepsilon Z_1/X(o)=x> + o(\varepsilon^3)$$

$$= \varepsilon \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\dot{Z}_1/X(o)=x> + \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 K \left[\dot{Z}_1, Z_1/X(o)=x\right]$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\dot{Z}_2/X(o)=x>$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <\dot{Z}_1/X(o)=x> \right] <Z_1/X(o)=x> + o(\varepsilon^3)$$

où K représente le terme de corrélation (voir paragraphe II.1.6) :

$$K \left[A,B/X(o)=x\right] = <AB/X(o)=x> - <A/X(o) =x> <B/X(o)=x>$$

Substituons maintenant, dans l'équation ci-dessus, les valeurs de Z_1 et Z_2 données par (2.17) :

$$\dot{L}(1+L)^{-1} = \varepsilon\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <F(x,t)/X(o) = x>$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \int_o^t K \left[F(x,t), F(x,t_1)/X(o)=x\right] dt_1$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_o^t <\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} F(x,t_1)/X(o)=x> \, dt_1$$

$$+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) <F(x,t)/X(o)=x> \right] \int_o^t dt_1 <F(x,t_1)/X(o)=x> + o(\varepsilon^3)$$

(2.26)

Nous pouvons donc finalement écrire l'équation stochastique (2.22) sous la forme :

$$\frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = \left\{ - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[\langle I(x,t)/X(o)=x \rangle + \varepsilon \int_o^t \left\langle \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} F(x,t_1)/X(o)=x \right\rangle dt_1 \right] \right.$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_o^t K \left[F(x,t), F(x,t_1)/X(o)=x \right] dt_1$$

$$\left. + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \langle F(x,t)/X(o)=x \rangle \right] \int_o^t \langle F(x,t_1)/X(o)=x \rangle \, dt_1 \right\} D(x,t) \qquad (2.27)$$

Nous venons donc de retracer la méthode de STRATONOVICH modifiée par SO et OGUNLANA ce qui nous a permis d'obtenir une équation d'évolution pour la densité de probabilité de la variable aléatoire X. Ce que nous venons de faire dans le cas à une dimension, nous pouvons aussi l'effectuer pour une variable à plusieurs dimensions ; par exemple pour :

$$\xi = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

où $\vec{x}$ et $\vec{v}$ représentent par exemple la position et la vitesse d'une particule. L'équation du mouvement est alors :

$$\dot{\xi} = \varepsilon \, F(\xi,t)$$

et l'équation (2.27) se généralise en :

$$\frac{\partial}{\partial t} D(\xi,t) = \left\{ - \varepsilon \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\langle F_j/\xi(o)=\xi \rangle + \varepsilon \sum_k \int_{-t}^{o} \left\langle \frac{\partial F_j}{\partial \xi_k} F_{k\sigma}/\xi(o)=\xi \right\rangle d\sigma \right] \right.$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \, \partial \xi_k} \int_{-t}^{o} K \left[F_j, F_{k\sigma}/\xi(o) = \xi \right] d\sigma$$

$$\left. + \varepsilon^2 \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} \langle F_j/\xi(o)=\xi \rangle \right] \int_{-t}^{o} \langle F_{k\sigma}/\xi(o) = \xi \rangle \, d\sigma \right\} D(\xi,t) \qquad (2.28)$$

où $F_{k\sigma} = F_k(\xi, t+\sigma)$.

Chapitre III

PLASMA D'ELECTRONS - HIERARCHIE DES EQUATIONS D'EVOLUTION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

III.1 - INTRODUCTION

Considérons, dans un volume V, un système composé de N électrons identiques et d'un fond uniforme de charges positives immobiles.

Nous allons supposer que ce système est soumis à l'action d'un champ électromagnétique extérieur. Dans la mesure où la vitesse des particules reste faible devant celle de la lumière, on peut négliger l'influence du champ magnétique. Ceci est le cas pour un plasma non quantique et non relativiste. Nous prendrons donc un champ du type :

$$\vec{E}_o \cos \omega_o t$$

Nous supposerons en outre que le plasma est spatialement homogène. Les calculs seront effectués entre deux collisions fortes.

Dans ces conditions, l'équation du mouvement d'un électron s'écrit :

$$\dot{\xi}_j = F^o(\xi_j,t) + \varepsilon F(\xi_j,t) \qquad (3.1)$$

avec :

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \vec{x}_j \\ \vec{v}_j \end{pmatrix}$$

Position et vitesse du $j^{ème}$ électron

$$F^o(\xi_j,t) = \begin{pmatrix} \vec{v}_j \\ -\frac{e}{m} \vec{E}_o \cos\omega_o t \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon F(\xi_j,t) = \begin{pmatrix} o \\ -\frac{e}{m} \vec{E}(\vec{x}_j,t) \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

où $(e\vec{E}_o \cos \omega_o t)$ est la force déterministe liée au champ électrique extérieur et $e\vec{E}(\vec{x},t)$ est la force stochastique due aux interactions des particules.

Nous allons voir maintenant dans quels cas nous pouvons supposer que la force stochastique est faible. Pour cela nous allons normaliser l'équation (3.1) en posant :

$$\begin{cases} \vec{x} = r_o \vec{x}^* \\ \vec{v} = v_o \vec{v}^* \\ t = (r_o/v_o) t^* \end{cases} \qquad (3.4)$$

où r_o et v_o représentent respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques du milieu.

Supposons que l'on puisse écrire :

$$e\vec{E}(\vec{x}_j,t) = \frac{\partial \phi_j}{\partial \vec{x}_j} \tag{3.5}$$

nous aurons alors : $\phi_j = \phi_o \, \phi_j^*$

Avec les coordonnées réduites (3.4), le système (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}_j^*}{dt^*} = \vec{v}_j^* \\ \dfrac{d\vec{v}_j^*}{dt^*} = -\dfrac{r_o}{v_o^2}\dfrac{e}{m}\vec{E}_o \cos\left(\omega_o \dfrac{r_o}{v_o} t^*\right) - \dfrac{\phi_o}{mv_o^2}\dfrac{\partial \phi_j^*}{\partial \vec{x}_j^*} \end{cases} \tag{3.6}$$

Nous allons maintenant étudier la valeur du paramètre de couplage :

$$\pi_{co} = \frac{\phi_o}{mv_o^2} \tag{3.7}$$

suivant les valeurs de r_o, v_o, ϕ_o et E_o.

En théorie cinétique classique, ce paramètre π_{co} et le paramètre de densité :

$$\pi_d = n_o \, r_o^3 \tag{3.8}$$

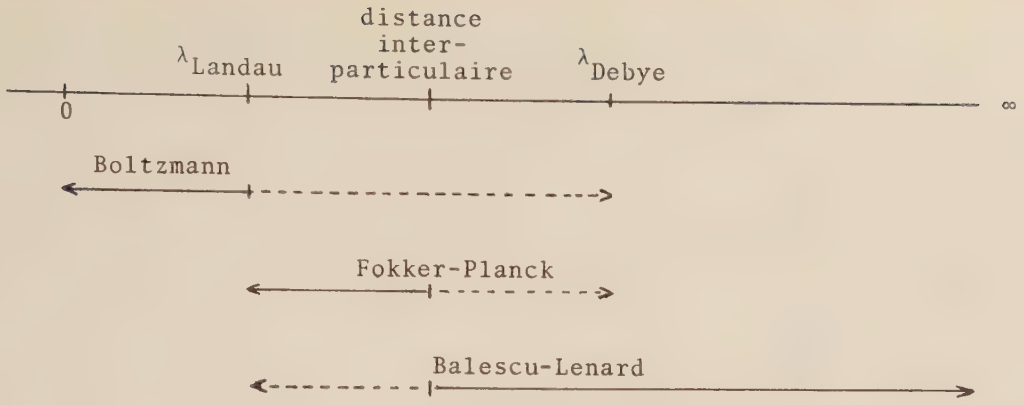
(avec $n_o = N/V$) servent à définir le paramètre de développement $\varepsilon << 1$ nécessaire pour briser la hiérarchie BBGKY. Il a été montré (voir notamment [28],[29], et [30] que, suivant les valeurs de π_{co} et π_d par rapport à $0(\varepsilon)$, $0(\varepsilon^{-1})$ et $0(1)$, trois cas pouvaient se présenter :

a) - $\pi_{co} = 0(1)$ et $\pi_d = 0(\varepsilon)$
   - Gaz peu dense dominé par des forces à courtes portées ;
   - r_o = longueur de LANDAU, v_o = vitesse thermique ;
   - l'équation correspondante est celle de BOLTZMANN.

b) - $\pi_{co} = 0(\varepsilon)$ et $\pi_d = 0(1)$
   - Gaz modérément dense - Couplage faible ;
   - r_o = distance moyenne interparticulaire ;
   - v_o = vitesse thermique ;
   - l'équation correspondante est celle de FOKKER-PLANCK.

c) - $\pi_{co} = 0(\varepsilon)$ et $\pi_d = 0(\varepsilon^{-1})$
   - Forces à longues portées ;
   - r_o = longueur de DEBYE, v_o = vitesse thermique ;
   - l'équation correspondante est celle de LENARD-BALESCU.

On peut résumer simplement le domaine de validité des trois équations cinétiques citées ci-dessus par le schéma suivant :



Revenons maintenant à notre problème. Les cas suivants peuvent se présenter :

A - Si l'amplitude E_o du champ extérieur est faible, nous pouvons considérer que nous sommes dans l'un des trois cas ci-dessus. Remarquons tout d'abord que le cas a) ne pourra pas être traité par la méthode de STRATONOVICH puisque celle-ci demande que $\pi_{co} = 0(\varepsilon)$ alors que dans a) nous avons $\pi_{co} = 0(1)$. Il ne reste donc uniquement que les cas b) et c).

Nous nous intéressons aux potentiels coulombiens, ce qui nous permet d'écrire d'après (3.5) :

$$\phi_j = \sum_{k \neq j}^{N} \frac{e^2}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} \qquad (3.9)$$

et alors : $\phi_o = \dfrac{e^2}{r_o}$

B - Si l'amplitude E_o de l'onde extérieure est grande de telle sorte que les électrons acquièrent dans celle-ci une énergie W_E supérieure ou égale à leur énergie thermique KT (ce cas est celui qui a motivé notre étude), nous sommes amenés à choisir les grandeurs caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} r_o = \dfrac{e\,E_o}{m\omega_o^2} = X_E & : \text{excursion maximale de l'électron dans l'onde.} \\ v_o = \dfrac{e\,E_o}{m\,\omega_o} = V_E & : \text{vitesse maximale de l'électron dans l'onde.} \\ r_o/v_o = 1/\omega_o \end{cases}$$

Nous nous apercevons alors que :

$$\cdot\ r_o/v_o^2 = m/eE_o$$

$$\cdot\ \pi_{co} = \frac{e^2}{m\,v_o^2\,r_o} = \left(\frac{\lambda_D}{r_o}\right)\left(\frac{1}{n_o\,\lambda_D^3}\right)\left(\frac{KT}{2\,W_E}\right)$$

Or : $$\frac{\lambda_D}{r_o} = \left(\frac{KT}{m\omega_p^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{\omega_o}{v_o} = \left(\frac{KT}{m\,v_o^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{\omega_o}{\omega_p}$$

d'où il résulte que :

$$\pi_{co} = \left(\frac{\omega_o}{\omega_p}\right)\left(\frac{1}{n_o\ \lambda_D^3}\right)\left(\frac{KT}{2\ W_E}\right)^{3/2} = \gamma.\varepsilon_1.\varepsilon_2 \qquad (3.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{n_o\ \lambda_D^3} \\ \\ \varepsilon_2 = \left(\dfrac{KT}{2\ W_E}\right)^{3/2} \end{cases} \qquad \text{et} \quad \gamma = \frac{\omega_o}{\omega_p} \qquad (3.11)$$

Le système d'équations (3.7) devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}_j^*}{dt^*} = \vec{v}_j^* \\ \\ \dfrac{d\vec{v}_j^*}{dt^*} = -\dfrac{\vec{E}_o}{E_o}\cos t^* - (\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2)\dfrac{\partial\phi_j^*}{\partial\vec{x}_j^*} \end{cases} \qquad (3.12)$$

avec :

$$\phi_j^* = \sum_{k\neq j} \frac{1}{|\vec{x}_j^* - \vec{x}_k^*|} \qquad (3.13)$$

Pour que π_{co} soit d'ordre ε, il est nécessaire que le produit $\gamma\varepsilon_1$ ne soit pas trop grand comparativement au paramètre ε_2 qui lui est très petit dans le cas B) que nous étudions en ce moment. Ceci est vrai pour l'interaction plasma-onde électromagnétique intense qui a motivé cette étude et où l'on a :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n_o\ \lambda_D^3} << 1$$

Comme de plus, nous avons choisi la fréquence ω_o de l'onde supérieure mais voisine de la fréquence plasma ω_p, le paramètre de couplage π_{co} est très petit devant 1.

Nous venons donc de trouver, dans le cas d'un champ extérieur intense, un paramètre de développement qui tient compte à la fois de l'importance du champ extérieur et des propriétés du plasma.

Finalement, nous pouvons résumer les cas que nous allons étudier dans le tableau suivant :

A) E_o faible		B) E_o intense
A_1 couplage faible	A_2 forces à longue portée	B
$r_o = (1/4\ \pi n_o)^{1/3}$	$r_o = \lambda_D$	$r_o = X_E$
$v_o = KT/m$	$v_o = KT/m$	$v_o = V_E$
$\varepsilon = \varepsilon_1^{2/3}$	$\varepsilon \sim \varepsilon_1$	$\varepsilon = \gamma\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$

(3.14)

III.2 - DENSITES DE PROBABILITE ET FONCTIONS DE DISTRIBUTION

Avant d'appliquer la méthode de STRATONOVICH au modèle que nous proposons, précisons les notations que nous allons utiliser en ce qui concerne les densités de probabilité et les fonctions de distribution.

Nous avons donc un système de N particules de même espèce dans un volume V. A un instant donné t, l'état dynamique du système est défini par un point $(\xi_1,\ldots, \xi_N)$ de l'espace des phases. (Notons que $\xi_j = \begin{pmatrix} x_j \\ v_j \end{pmatrix}$). La connaissance exacte de la phase n'est jamais possible et l'expérimentateur peut seulement mesurer des moyennes. En conséquence, on introduit une densité de probabilité :

$$D(\xi_1,\ldots, \xi_N ; t) \qquad (3.15)$$

sur les états dynamiques possibles du système [31],[32],[4]. Les variables dynamiques sont alors remplacées par des moyennes d'ensembles qui sont les espérances des variables dynamiques calculées à l'aide de la densité de probabilité $D(\xi_1,\ldots, \xi_N; t)$. Alors $D(\xi_1,\ldots,\xi_N;t)\, d\xi_1\ldots d\xi_N$ représente la probabilité de trouver la particule 1 en $d\xi_1$, la particule 2 en $d\xi_2$,..., la particule N en $d\xi_N$, au temps t. Il est alors clair, d'après les rappels de probabilité du chapitre II, que :

$$D_{1,\ldots,j}(\xi_1,\ldots,\xi_j;t) = \int D(\xi_1,\ldots,\xi_N;t)\, d\xi_{j+1}\cdots d\xi_N \qquad (3.16)$$

représente la probabilité de trouver simultanément la particule 1 en $d\xi_1$,..., et la particule j en $d\xi_j$ sans regarder où se trouvent les particules j + 1,..., N.

La quantité qui est la plus souvent utilisée en théorie cinétique est la fonction de distribution à j-particules :

$$f_j(\xi_1,\ldots,\xi_j;t) = V^j \int D(\xi_1,\ldots,\xi_N;t)\, d\xi_{j+1}\ldots d\xi_N \qquad (3.17)$$

Avec ces définitions nous sommes maintenant en mesure de calculer la valeur moyenne d'une grandeur observable $\theta(\xi_1,\ldots,\xi_N,t)$:

$$\langle\theta(\xi_1,\ldots\xi_N,t)\rangle = \int \theta(\xi_1,\ldots,\xi_N,t)\, D(\xi_1,\ldots,\xi_N,t)\, d\xi_1\cdots d\xi_N$$

Par contre, pour déterminer la valeur moyenne de quantités telles que :

$$\theta(t)\ \theta(t')$$

la connaissance probable de l'état du système au temps t est insuffisante. On est alors obligé d'introduire une densité de probabilité plus générale comme l'a fait, par exemple, ROSTOKER [13]. On définit ainsi la densité de probabilité à deux temps:

$$D(\xi_1,\ldots,\xi_N,t\,;\,\xi'_1,\ldots,\xi'_N,t')\, d\xi_1\cdots d\xi_N\, d\xi'_1\cdots d\xi'_N \qquad (3.18)$$

qui représente la probabilité que le système soit dans le volume de l'espace des phases :

$$\left([\xi_1,\ldots,\xi_N]\ ,\ [d\xi_1,\ldots, d\xi_N]\right)$$

au temps t et dans :

$$\left([\xi'_1,\ldots,\xi'_N]\ ,\ [d\xi'_1,\ldots, d\xi'_N]\right) \qquad \text{au temps } t'.$$

On peut alors définir, en intégrant sur un certain nombre de variables, les densités de probabilité réduites :

$$D_{1\cdots r_1\cdots s}(\xi_1,\ldots,\xi_r,t\ ;\ \xi'_1,\ldots,\xi'_s,t') = \int D(\xi_1,\ldots,\xi_N,t\ ;\ \xi'_1,\ldots,\xi'_N,t')\ d\xi_{r+1}\cdots\ d\xi_N\ .\ d\xi'_{s+1}\cdots\ d\xi'_N$$

ainsi que les densités de probabilité conditionnelles (voir chapitre II) :

$$D_{1\cdots r/1\cdots s}(\xi_1,\ldots,\xi_r,t/\xi'_1,\ldots,\xi'_s,t') = \frac{D_{1\cdots r_1\cdots s}(\xi_1,\ldots,\xi_r,t;\xi'_1,\ldots,\xi'_s,t')}{D_{1\cdots s}(\xi'_1,\ldots,\xi'_s,t')} \qquad (3.19)$$

qui représente la probabilité de trouver les particules j en ξ_j au temps $t(1 \leqslant j \leqslant r)$, sachant que les particules k sont en ξ'_k au temps t' $(1 << k << s)$.

Alors par extension, pour calculer les moyennes de quantités du type :

$$\theta(t_1)\ \ldots\ \theta(t_j)$$

on définit la densité :

$$D\left(\xi_1^{(1)},\ldots,\ \xi_N^{(1)},\ t_1\ ;\ldots;\ \xi_1^{(j)},\ldots,\ \xi_N^{(j)},\ t_j\right) \qquad (3.20)$$

qui est la probabilité que le système soit en $\left(\xi_1^{(1)},\ldots,\ \xi_N^{(1)}\right)$ à t_1, ..., et en $\left(\xi_1^{(j)},\ldots,\xi_N^{(j)}\right)$ à t_j.

En intégrant sur un certain nombre de variables, on obtient, comme précédemment, les distributions réduites et, par exemple, en intégrant sur toutes les variables à l'exception d'une par groupe $\left(\xi_1^{(s)},\ldots,\ \xi_N^{(s)}\right)$, on définit :

$$D_{\mu_1,\ldots,\mu_j}(\xi_1,t_1;\ldots;\xi_j,\ t_j) \qquad (3.21)$$

qui est la densité de probabilité de trouver les particules μ_k en ξ_k au temps t_k $(k = 1,\ldots j)$. Ici $\mu_1,\ldots,\ \mu_j$ représentent une suite de j nombres, pas nécessairement distincts, pris dans la suite $(1,\ldots,\ N)$.

Par exemple :

$D_{1,\ 1,2}(\xi_1,t_1\ ;\ \xi_2,\ t_2\ ;\ \xi_3,\ t_3)$ représente la densité de probabilité de trouver la particule 1 en ξ_1 à t_1 et en ξ_2 à t_2 et la particule 2 en ξ_3 à t_3.

Nous ne considérerons que des distributions symétriques, et nous supprimerons les indices μ_k lorsque ceux-ci sont tous distincts.

Enfin définissons :

$$D_{\mu_1,\ldots,\mu_j/\mu'_1,\ldots,\mu'_k}(\xi_1,t_1;\ldots;\xi_j,t_j/\xi'_1,t'_1;\ldots;\xi'_k,t'_k) = \frac{D_{\mu_1,\ldots,\mu_j;\mu'_1,\ldots\mu'_k}(\xi_1,t_1;\ldots,\xi_j,t_j;\xi'_1,t'_1;\ldots;\xi'_k,t'_k)}{D_{\mu'_1,\ldots,\mu'_k}(\xi'_1,t'_1;\ldots,\xi'_k,t'_k)} \qquad (3.22)$$

qui est la densité de probabilité de trouver les particules μ_n en ξ_n à t_n (n = 1,... j) sachant que les particules μ'_m sont en ξ'_m à t'_m(m = 1,...k).

Par exemple :

$D_{1/2}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)\ d\xi_1\ d\xi_2$ est la probabilité de trouver la particule μ_1 en ξ_1 à t_1 sachant que la particule μ_2 est en ξ_2 à t_2.

Nous pouvons supprimer les indices dans les mêmes conditions que celles définies ci-dessus.

Définissons, pour terminer, les fonctions de distribution conditionnelles :

$$g_{j/k}(\xi_1,t_1;\ldots;\xi_j,t_j/\xi'_1,t'_1;\ldots;\xi'_k,t'_k) = V^j\ D(\xi_1,t_1;\ldots;\xi_j,t_j/\xi'_1,t'_1;\ldots;\xi'_k,t'_k)$$

avec $j + k \leq N$ (3.23)

III.3 - HIERARCHIE DES EQUATIONS D'EVOLUTION POUR LES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

Nous avons donc à traiter le système d'équations (3.1) à (3.3) :

$$\dot{\xi}_j = F^\circ(\xi_j,t) + \varepsilon F(\xi_j,t) \tag{3.24}$$

Pour pouvoir appliquer la méthode de STRATONOVICH (voir chapitre II), il est nécessaire d'avoir un système du type :

$$\dot{\xi} = \varepsilon F^*(\xi,t) \tag{3.25}$$

et pour cela nous allons effectuer, comme le proposent SO [16] et OGUNLANA [17], un changement de variables qui transformera l'équation (3.24) en une équation du type (3.25).

III.3.1 - Solution du système $\dot{\xi}_j = F^\circ(\xi_j,t)$

Rappelons que :

$$F^\circ(\xi_j,t) = \begin{pmatrix} v_j \\ -\frac{e}{m}\vec{E}_o \cos\omega_o t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^\circ\ (\xi_j,t) \\ F_2^\circ\ (\xi_j,t) \end{pmatrix}$$

Le système $\dot{\xi}_j = F^\circ(\xi_j,t)$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_j = \vec{v}_j \\ \dot{\vec{v}}_j = -\frac{e}{m}\vec{E}_o \cos\omega_o t \end{cases} \tag{3.26}$$

Notons $S(t,t_o,\xi_{jo})$ la solution de ce système qui vaut ξ_{jo} à t_o, nous avons :

$$S(t,t_o,\xi_{jo}) = \begin{pmatrix} \vec{x}_{jo} + (t+t_o)\vec{v}_{jo} + \frac{e}{m\omega_o}\vec{E}_o\left[\frac{\cos\omega_o t-\cos\omega_o t_o}{\omega_o}+(t-t_o)\sin\omega_o t_o\right] \\ \vec{v}_{jo} - \frac{e}{m\omega_o}\vec{E}_o\ (\sin\omega_o t-\sin\omega_o t_o) \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

afin d'alléger l'écriture, nous poserons :

$$\vec{E}_o(t_1,t_2) = -\frac{e}{m\,\omega_o}(\sin\omega_o t_1 - \sin\omega_o t_2)\cdot\vec{E}_o$$

$$\vec{E}_o(t_1,t_2,t_3) = -\frac{e}{m\,\omega_o}\left[\frac{\cos\omega_o t_1-\cos\omega_o t_2}{\omega_o} + (t_1-t_2)\sin\omega_o t_3\right].\vec{E}_o \qquad (3.28)$$

on peut alors écrire :

$$S(t,t_o,\xi_{jo}) = \begin{pmatrix} \vec{x}_{jo} + (t-t_o)\vec{v}_{jo} - \vec{E}_o(t,t_o,t_o) \\ \vec{v}_{jo} + \vec{E}_o(t,\,t_o) \end{pmatrix} \qquad (3.29)$$

III.3.2 - Changement de variables

Si l'on a $\xi_j = S(t,t_o,\eta_j)$, nous poserons :

$$\eta_j = S(t_o,t,\xi_j) = S^{-1}(t,t_o,\xi_j) \qquad (3.30)$$

c'est-à-dire :

$$S^{-1}(t,t_o,\xi_j) = \begin{pmatrix} \vec{x}_j-(t-t_o)\vec{v}_j+\vec{E}_o(t,t_o,t) \\ \vec{v}_j - \vec{E}_o\,(t,t_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{-1}\,(t,t_o,\xi_j) \\ S_2^{-1}\,(t,t_o,\xi_j) \end{pmatrix} \qquad (3.31)$$

Si l'on note par $\xi_{j\mu}$, S_μ, S_μ^{-1} , F_μ° les composantes de ξ_j, S, S^{-1} et F°, (μ = 1, 2), nous constatons alors que :

$$\frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} F_\nu^\circ \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu = 1,\ 2 \qquad (3.32)$$

En effet :

. Pour μ = 1 :

$$\frac{\partial S_1^{-1}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} F_\nu^\circ \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} = \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial t} + F_1^\circ \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial \vec{x}_j} + F_2^\circ \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial \vec{v}_j}$$

$$= \left[-\vec{v}_j + \frac{e\vec{E}_o}{m\omega_o}\sin\omega_o t - \frac{e\vec{E}_o}{m}(t-t_o)\cos\omega_o t - \frac{e\vec{E}_o}{m\omega_o}\sin\omega_o t\right]$$

$$+ \vec{v}_j + (t-t_o)\frac{e\vec{E}_o}{m}\cos\omega_o t = 0$$

. Pour $\mu = 2$:

$$\frac{\partial S_2^{-1}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} F_\nu^\circ \frac{\partial S_2^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} = \frac{e \vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t - \frac{e \vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t = 0$$

Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} t = \tau \\ \xi_j = S(t, t_o, \eta_j) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau = t \\ \eta_j = S^{-1}(t, t_o, \xi_j) \end{cases} \tag{3.33}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{d\eta_{j\mu}}{d\tau} = \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\tau} + \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} \frac{d\xi_{j\nu}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} \cdot \frac{d\xi_{j\nu}}{dt}$$

or d'après (3.24), nous avons : $\frac{d\xi_{j\nu}}{dt} = F_\nu^\circ + \varepsilon F_\nu$

d'où : $$\frac{d\eta_{j\mu}}{d\tau} = \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} \left(F_\nu^\circ + \varepsilon F_\nu \right)$$

et si l'on tient compte de (3.32), il reste :

$$\frac{d\eta_{j\mu}}{d\tau} = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{2} F_\nu \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} \tag{3.34}$$

Posons : $$\tilde{F}(\eta_j, \tau) = F\left(S(t, t_o, \eta_j), \tau \right)$$

et : $$\mathcal{F}_\mu(\eta_j, \tau) = \sum_{\nu=1}^{2} \tilde{F}_\nu(\eta_j, \tau) \frac{\partial S_\mu^{-1}}{\partial \xi_{j\nu}} \tag{3.35}$$

Alors (3.34) devient :

$$\boxed{\frac{d\eta_{j\mu}}{d\tau} = \varepsilon \mathcal{F}_\mu(\eta_j, \tau)} \tag{3.36}$$

III.3.3 - Equation de STRATONOVICH

Le système (3.36) peut être traité par la méthode de STRATONOVICH, ce qui

nous permet d'écrire l'équation que doit satisfaire la densité de probabilité $D(\eta_i,\tau)$. Nous noterons $\eta_{1\mu}$ la $\mu^{ème}$ composante du vecteur η_1 de la particule n° 1. (avec $\mu = 1, 2$).
On a alors d'après l'équation (2.28) :

$$\frac{\partial}{\partial\tau} D(\eta_1,\tau) = \Bigg\{ -\varepsilon \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta_{1\mu}} \Big[<\mathcal{F}_\mu/\eta_1(t_o) = \eta_1> + \varepsilon \int_{t_o-\tau}^{o} \sum_{\nu} <\frac{\partial \mathcal{F}_\mu}{\partial \eta_{1\nu}} \mathcal{F}_{\nu\sigma}/\eta_1(t_o)=\eta_1> d\sigma \Big]$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2}{\partial\eta_{1\mu}\,\partial\eta_{1\nu}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\Big[\mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_{\nu\sigma}/\eta_1(t_o) = \eta_1 \Big] \, d\sigma$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial\eta_{1\mu}} \Big[\frac{\partial}{\partial\eta_{1\nu}} <\mathcal{F}_\mu/\eta_1(t_o)=\eta_1> \Big] \int_{t_o-\tau}^{o} <\mathcal{F}_{\mu\sigma}/\eta_1(t_o)=\eta_1> d\sigma \Bigg\} D(\eta_1,\tau) \qquad (3.37)$$

où $\mathcal{F}_{\mu\sigma}$ signifie que la fonction est évaluée à $(t+\sigma)$ et où K est la fonction de corrélation $K(\alpha,\beta) = <\alpha\beta> - <\alpha> <\beta>$; notons en outre que toutes les moyennes utilisées sont conditionnelles, c'est-à-dire que les moyennes du type $<\mathcal{F}_\mu/\eta_1(t_o)=\eta_1>$ sont calculées avec des densités de probabilité conditionnelles. En utilisant la définition de $\mathcal{F}$, on peut écrire :

$$\varepsilon \mathcal{F} = \begin{pmatrix} (t-t_o)\frac{e}{m} \vec{E} \\ \\ -\frac{e}{m} \vec{E} \end{pmatrix} \qquad (3.38)$$

Notons que $\tilde{F}_{\mu\sigma} = \tilde{F}_\mu(\eta, \tau+\sigma) = F_\mu\big(S(t,t_o,\eta), \tau+\sigma\big)$.

Nous allons pouvoir calculer maintenant, un à un, tous les termes du membre de droite dans (3.37) :

1er terme

$$-\varepsilon \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial\eta_{1\mu}} <\mathcal{F}_\mu/\eta_1(t_o) =\eta_1> = -(t-t_o)\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} <\vec{E}/\eta_1(t_o)=\eta_1>$$

$$+ \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} <\vec{E}/\eta_1(t_o) = \eta_1> \qquad (3.39)$$

où : $\eta_1 = \begin{pmatrix} \vec{x}_{\eta_1} \\ \\ \vec{v}_{\eta_1} \end{pmatrix}$

2ème terme

$$- \varepsilon^2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_{1\mu}} \int_{t_o-\tau}^{o} < \frac{\partial \mathcal{F}_\mu}{\partial \eta_{1\nu}} \mathcal{F}_{\nu\sigma} / \eta_1(t_o) = \eta_1 > d\sigma$$

$$= \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} < \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 > d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} < \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 > (\tau + \sigma - t_o) d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} < \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 > (\tau + \sigma - t_o) d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} < \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 > d\sigma \qquad (3.40)$$

3ème terme

$$\varepsilon^2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2}{\partial \eta_{1\mu} \partial \eta_{1\nu}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\left[\mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_{\nu\sigma} / \eta_1(t_o) = \eta_1 \right] d\sigma$$

$$= \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}_{\eta 1} \partial \vec{x}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 \right] (\tau + \sigma - t_o) d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}_{\eta 1} \partial \vec{v}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 \right] d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_{\eta 1} \partial \vec{x}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 \right] (\tau + \sigma - t_o) d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_{\eta 1} \partial \vec{v}_{\eta 1}} \int_{t_o-\tau}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1 \right] d\sigma \qquad (3.41)$$

4ème terme

$$\varepsilon^2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_{1\mu}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_{1\nu}} < \mathcal{F}_\mu / \eta_1(t_o) = \eta_1 > \right] \int_{t_o-\tau}^{o} < \mathcal{F}_{\nu\sigma} / \eta_1(t_o) = \eta_1 > d\sigma$$

$$= \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} <\vec{E} / \eta_1(t_o) = \eta_1> \right] \int_{t_o-\tau}^{o} <\vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1> (\tau+\sigma-t_o)\, d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (\tau - t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} <\vec{E} / \eta_1(t_o) = \eta_1> \right] \int_{t_o-\tau}^{o} <\vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1> d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} <\vec{E} / \eta_1(t_o) = \eta_1> \right] \int_{t_o-\tau}^{o} <E_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1> (\tau+\sigma-t_o)\, d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} <\vec{E} / \eta_1(t_o) = \eta_1> \right] \int_{t_o-\tau}^{o} <\vec{E}_\sigma / \eta_1(t_o) = \eta_1> d\sigma \qquad (3.42)$$

III.3.4 - Tranformation inverse

Nous avons obtenu l'équation d'évolution de $D(\eta_1,\tau)$, mais en fait c'est $D(\xi_1,t)$ qui nous intéresse. Afin de trouver l'équation d'évolution de $D(\xi_1,t)$ nous allons effectuer la transformation inverse de (3.33) qui permet de passer des η aux ξ :

$$\begin{cases} \tau = t \\ \eta = S^{-1}(t,t_o,\xi) \end{cases}$$

la densité de probabilité s'écrit :

$$D(\eta,\tau)\, d\eta = D\left(S^{-1}(t,t_o,\xi),t\right) d\eta = J\, D(\xi,t)\, d\xi$$

où J est le Jacobien.

Pour effectuer cette transformation inverse, nous allons avoir besoin de :

. $\dfrac{\partial \xi_{1\mu}}{\partial \eta_1}$ car $\dfrac{\partial h(\eta_1,\tau)}{\partial \eta_1} = \sum_{\mu=1}^{2} \dfrac{\partial h(\xi_1,t)}{\partial \xi_{1\mu}} \dfrac{\partial \xi_{1\mu}}{\partial \eta_1}$ quelle que soit la fonction h.

. Jacobien J.

$$\cdot \quad \frac{\partial h(\eta_1,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial h(\xi_1,t)}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2} \frac{\partial h(\xi_1,t)}{\partial \xi_{1\mu}} \frac{\partial S_\mu}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial h(\xi_1,t)}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2} \frac{\partial h(\xi_1,t)}{\partial \xi_{1\mu}} F^\circ_\mu \qquad (3.43)$$

D'après (3.29), on voit que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} = 1 \quad ; & \dfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} = (t-t_o) \\ \dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial \vec{x}_{\eta 1}} = 0 \quad ; & \dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial \vec{v}_{\eta 1}} = 1 \end{cases} \tag{3.44}$$

De même, d'après (3.31), on trouve que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{x}_{\eta 1}}{\partial \vec{x}_1} = 1 \quad ; & \dfrac{\partial \vec{x}_{\eta 1}}{\partial \vec{v}_1} = -(t-t_o) \\ \dfrac{\partial \vec{v}_{\eta 1}}{\partial \vec{x}_1} = 0 \quad ; & \dfrac{\partial \vec{v}_{\eta 1}}{\partial \vec{v}_1} = 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

et par conséquent le Jacobien est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -(t-t_o) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

d'où $D(\eta_1,\tau) = D(\xi_1,t)$

et d'après (3.43), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} D(\eta_1,\tau) = \frac{\partial}{\partial t} D(\xi_1,t) + \sum_{\mu=1}^{2} F_\mu^\circ \frac{\partial D(\xi_1,t)}{\partial \xi_{1\mu}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} D(\xi_1,t) + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e}{m} \vec{E}_o \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{v}_1} \cos \omega_o t \tag{3.46}$$

Appliquons maintenant la transformation inverse au membre de droite de (3.37) :

1er terme - Grâce à (3.44), on obtient pour (3.39) :

$$-(t-t_o) \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \langle \vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1 \rangle + \frac{e}{m}(t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \langle \vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1 \rangle$$

$$+ \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \langle \vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1 \rangle = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \langle \vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1 \rangle \tag{3.47}$$

où :

$$\alpha_1 = \left[\vec{x}_1 - \vec{v}_1 t_1 + \vec{E}_o(t,t_o,t), \vec{v}_1 - \vec{E}_o(t,t_o) \right] \tag{3.48}$$

2ème terme - De la même façon, on obtient pour (3.40) :

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle (t+\sigma-t_o) d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle (t+\sigma-t_o) d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle (t+\sigma-t_o) d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma - \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 (t-t_o) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle d\sigma = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \int_{t_o-t}^{o} \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1 \right\rangle \sigma \, d\sigma \qquad (3.49)$$

car $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}_1} = 0$, E étant fonction de x_1 et t_1 uniquement.

3ème terme - On a de même, à partir de (3.41)

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_1 \, \partial \vec{x}_1} \int_{t_o-t}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1\right] \sigma \, d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_1 \, \partial \vec{v}_1} \int_{t_o-t}^{o} K\left[\vec{E}, \vec{E}_\sigma / \xi_1(t_o) = \alpha_1\right] d\sigma \qquad (3.50)$$

4ème terme - Enfin, à partir de (3.42), il vient :

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} <\vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \right] \int_{t_o-t}^{o} <\vec{E}_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1>\sigma \, d\sigma$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} <\vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \right] \int_{t_o-t}^{o} <\vec{E}_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \, d\sigma$$

Finalement, compte tenu de (3.46) et de la définition de la fonction de distribution f_1 à une particule, l'équation (3.37) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\xi_1,t) + \vec{v}_1 . \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e}{m} \vec{E}_o . \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} \cos \omega_o t$$

$$= \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left(<\vec{E}/\xi_1(t_o)=\alpha_1> f_1 \right) + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left\{ \int_{t_o-t}^{o} <\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}_1} \vec{E}\sigma/\xi_1(t_o)=\alpha_1>\sigma \, d\sigma \, f_1 \right\}$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_1 \, \partial \vec{x}_1} \left\{ \int_{t_o-t}^{o} K\left[\vec{E},\vec{E}_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1\right] \sigma \, d\sigma \, f_1 \right\}$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_1 \, \partial \vec{v}_1} \left\{ \int_{t_o-t}^{o} K\left[\vec{E},\vec{E}_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1\right] d\sigma \, f_1 \right\}$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} <\vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \right] \int_{t_o-t}^{o} <E_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1>\sigma \, d\sigma \, f_1 \right\}$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} <\vec{E}/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \right] \int_{t_o-t}^{o} <\vec{E}_\sigma/\xi_1(t_o) = \alpha_1> \, d\sigma \, f_1 \right\} \qquad (3.51)$$

Précisons un peu ce que signifie $\vec{E}_\sigma$:

On avait par définition $\vec{E}(\eta_1,\tau_1) = \vec{E}(S(t_1,t_o,\eta_1),t_1)$.

Effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} \eta_1 = S^{-1}(t_1,t_o,\xi_1) \\ \tau_1 = t_1 \end{cases}$$

sur la fonction

$$\vec{E}_\sigma = \vec{E}(\eta_1, \tau_1 + \sigma)$$

$$= \vec{E}\ (S^{-1}(t_1, t_o, \xi_1),\ \tau_1 + \sigma)$$

$$= \vec{E}\ \left[S\left(t_1+\sigma, t_o,\ S^{-1}(t_1, t_o, \xi_1)\right), t_1+\sigma\right]$$

Alors (3.29) et (3.31) combinées, nous donnent :

$$S\ [t_1+\sigma,\ t_o,\ S^{-1}(t_1, t_o, \xi_1)] = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 + \vec{v}_1\sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma,\ t_1,\ t_1) \\ \\ \vec{v}_1 + \vec{E}_o\ (t_1+\sigma,\ t_1) \end{pmatrix} \qquad (3.52)$$

$\vec{E}_\sigma$ représente donc le champ au temps $(t_1+\sigma)$ en un point où se trouverait la particule 1 au temps $t_1+\sigma$ si elle avait suivi le mouvement non perturbé.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons réécrire (3.51) sous la forme que nous utiliserons par la suite, c'est-à-dire en faisant $t_o = 0$ et en remplaçant les vecteurs par leurs composantes. Ainsi nous écrirons :

$$\vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} = v_{1\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

où α est sommé de 1 à 3. (Convention : indices répétés deux fois dans le même terme $= \sum_{\alpha=1}^{3}$).

L'équation (3.51) devient donc :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + v_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} - \frac{e}{m} E_{o\alpha} \cos \omega_o t_1 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \right] f_1(\xi_1, t_1)$$

$$= \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left(\langle E_\alpha / \xi_1(o) = \alpha_1 \rangle f_1 \right)$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left\{ \int_{-t_1}^{o} \left\langle \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_{1\beta}} E_{\beta\sigma} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle_\sigma d\sigma\ f_1 \right\}$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\, \partial x_{1\beta}} \left\{ \int_{-t_1}^{o} K\left[E_\alpha E_{\beta\sigma} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right] \sigma\, d\sigma\ f_1 \right\}$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\, \partial v_{1\beta}} \left\{ \int_{-t_1}^{o} K\left[E_\alpha E_{\beta\sigma} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right] d\sigma\ f_1 \right\}$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \langle E_\alpha / \xi_1(o) = \alpha_1 \rangle \right| \int_{-t_1}^{o} \langle E_{\beta\sigma} / \xi_1(o) = \alpha_1 \rangle\, \sigma\, d\sigma\ f_1 \right\}$$

$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial v_{1\beta}} \langle E_\alpha / \xi_1(o) = \alpha_1 \rangle \right| \int_{-t_1}^{o} \langle E_{\beta\sigma} / \xi_1(o) = \alpha_1 \rangle\, d\sigma\ f_1 \right\} \qquad (3.53)$$

III.3.5 - Hiérarchie des équations d'évolution pour les fonctions de distribution

L'équation d'évolution (3.51) que nous venons d'obtenir ne permet pas de calculer la fonction de distribution $f_1(\xi_1,t_1)$. En effet, les moyennes qui interviennent dans le membre de droite de cette équation sont des moyennes conditionnelles qui sont calculées à l'aide de densités de probabilité conditionnelle telles que :

$$D(\xi_j,t_1/\alpha_1,o)$$

ou

$$D(\xi_j,t_1\ ;\ \xi_k,t_1+\sigma/\alpha_1,o) \qquad (j\neq k\neq 1)$$

par exemple.

Cependant, nous aurions très bien pu appliquer la méthode de STRATONOVICH avec la densité de probabilité $D(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$, cette fonction aurait satisfait à la même équation que $D(\xi_1,t_1)$ mais avec la condition supplémentaire :

$$\xi_2(t_2) = \xi_2$$

imposée sur toutes les moyennes. Par conséquent, l'équation d'évolution de $g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$ s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{1\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}}-\frac{e}{m}E_{o\alpha}\cos\omega_o t_1\frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\right]g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$$

$$=\frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\langle E_\alpha/\xi_1(o)=\alpha_1\ ;\ \xi_2(t_2)=\xi_2\rangle\, g_{1/1}$$

$$-\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\,\partial x_{1\beta}}\int_{-t_1}^{o}K\left[E_\alpha E_{\beta\sigma}/\xi_1(o)=\alpha_1\ ;\ \xi_2(t_2)=\xi_2\right]\sigma\,d\sigma\, g_{1/1}$$

$$+\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\int_{-t_1}^{o}\left\langle\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_{1\beta}}E_{\beta\sigma}/\xi_1(o)=\alpha_1\ ;\xi_2(t_2)=\xi_2\right\rangle\sigma\,d\sigma\, g_{1/1}$$

$$+\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\,\partial v_{1\beta}}\int_{-t_1}^{o}K\left[E_\alpha E_{\beta\sigma}/\xi_1(o)=\alpha_1\ ;\ \xi_2(t_2)=\xi_2\right]d\sigma\, g_{1/1}$$

$$-\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}}\langle E_\alpha/\xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2\rangle\right]\int_{-t_1}^{o}\langle E_{\beta\sigma}/\xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2\rangle\sigma\,d\sigma\, g_{1/1}$$

$$+\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial v_{1\beta}}\langle E_\alpha/\xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2\rangle\right]\int_{-t_1}^{o}\langle E_{\beta\sigma}/\xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2\rangle\,d\sigma\, g_{1/1} \qquad (3.54)$$

De la même manière, nous aurions pu écrire des équations analogues pour $g_{1/2}$, $g_{1/3}$, etc.... Toutes ces équations dépendent les unes des autres et nous avons

ainsi obtenu une hiérarchie qui, par son essence, est différente de la hiérarchie B.B.G.K.Y.,bien qu'elle permette de l'obtenir comme cas particulier, ainsi que l'a montré SO pour le problème de particules en interaction coulombienne et en l'absence de champ extérieur.

Le problème qui maintenant va se poser à nous est le même que celui qui apparaît avec la hiérarchie B.B.G.K.Y. : comment briser cette chaîne d'équations et comment obtenir finalement une équation indépendante pour la fonction de distribution à une particule f_1 ?

Chapitre IV

PLASMA D'ELECTRONS : EQUATIONS CINETIQUES

IV.1 - INTRODUCTION

Afin de rompre la chaîne d'équations que nous avons obtenue, nous allons utiliser la méthode de développement en cumulant, comme l'ont fait ROSTOKER et ROSENBLUTH [5], pour la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Nous poserons donc :

$$D(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2) = D(\xi_1,t_1)\, D(\xi_2,t_2) + P(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2) \tag{4.1}$$

$$D(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2;\xi_3 t_3) = \prod_{i=1}^{3} D(\xi_i,t_i) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k}} D(\xi_i,t_i)\, P(\xi_j,t_j;\xi_k,t_k) + T(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2;\xi_3,t_3) \tag{4.2}$$

L'hypothèse de base de ROSTOKER et ROSENBLUTH est de supposer que :

$$\frac{P(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2)}{D(\xi_1,t_1)\, D(\xi_2,t_2)} = 0(\varepsilon)$$

et

$$\frac{T(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2;\xi_3,t_3)}{\prod_{i=1}^{3} D(\xi_i,t_i)} = 0(\varepsilon^2)$$

Rappelons que dans les trois cas (A_1, A_2 et B) que nous étudions (voir chapitre III - paragraphe III.1) :

$$\Pi_{co} = 0(\varepsilon)$$

Nous pouvons aussi noter qu'à <u>l'ordre zéro</u> nous avons par exemple :

$$D(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2) = \prod_{i=1}^{2} D(\xi_i,t_i) \tag{4.3}$$

$$f_2(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2) = \prod_{i=1}^{2} f_1(\xi_i,t_i) \tag{4.4}$$

$$g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2) = V\, D(\xi_1,t_1) = f_1(\xi_1,t_1) \tag{4.5}$$

et pour une même particule :

$$D_{1,1}(\xi_1,t_1;\xi_1',t_1') = D(\xi_1,t_1)\, \delta\left[\vec{x}_1'-\vec{x}_1-\vec{v}_1(t_1'-t_1) + \vec{E}_o(t_1',t_1,t_1)\right] .\delta\left[\vec{v}_1' - \vec{v}_1 - \vec{E}_o(t_1', t_1)\right] \tag{4.6}$$

Simultanément avec ces développements en cumulant nous utiliserons des développements des fonctions de distribution à une particule. En première approximation, nous avons supposé que les trajectoires des électrons étaient sinusoïdales. Soit f_1° la fonction de distribution à une particule dans ce cas. Nous noterons δf_1 l'écart apporté par les fluctuations :

$$f_1 = f_1^\circ + \delta f_1 \tag{4.7}$$

L'équation du mouvement avait fait apparaître la force $F^\circ + \varepsilon F$ qui nous montre que les fluctuations sont d'ordre ε par rapport au mouvement non perturbé. Il est donc logique de penser que δf_1 est aussi d'ordre ε.

Nous aurons de même pour $g_{1/1}$:

$$g_{1/1} = g_{1/1}^\circ + \delta g_{1/1} \tag{4.8}$$

où $\delta g_{1/1}$ est d'ordre ε.

Nous avons vu dans les développements en cluster qu'à l'ordre zéro $g_{1/1}$ était égal à f_1, par conséquent (4.8) s'écrit :

$$g_{1/1} = f_1 + \delta g_{1/1} \tag{4.9}$$

Nous allons maintenant revenir à l'équation d'évolution (3.53) pour la fonction de distribution f_1 et nous allons y appliquer les développements ci-dessus. Précisons que pour le cas A_1 (champ externe faible-couplage faible) nous serons obligés de conserver les termes jusqu'à l'ordre 2 en ε pour obtenir une équation non triviale. Par contre il suffira de s'arrêter à l'ordre un pour les cas A_2 (champ externe faible-forces à longue portée) et B (champ externe fort).

IV.2 - EQUATION DE f_1 : EQUATION DE FOKKER-PLANCK GENERALISEE

Dans tout ce qui va suivre, nous allons supposer que le système est spatialement homogène, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} = 0 \tag{4.10}$$

ce qui entraîne notamment :

$$\int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_j)}{\partial \vec{x}_1} \, f_1(\xi_j, t) \, d\xi_j = 0 \tag{4.11}$$

a) Coordonnées normalisées

Nous allons, dans ce paragraphe a), utiliser les coordonnées normalisées introduites en (3.4), mais afin d'alléger l'écriture nous noterons les coordonnées normalisées sans astérisque, réservant ce signe aux anciennes coordonnées. On aura ainsi :

$$\begin{cases} \vec{x}^* = r_o \, \vec{x} \\ \vec{v}^* = v_o \, \vec{v} \\ t^* = (r_o / v_o) t \end{cases}$$

Posons $n_o = \frac{N}{V^*}$. Etant donné le grand nombre de particules nous dirons aussi que :

$$\frac{N-1}{V^*} \sim n_o, \quad \text{etc...}$$

On a alors :

$$\frac{N}{V} = \frac{N}{V^*} r_o^3 = n_o r_o^3 = \pi_d$$

Compte tenu de l'homogénéité spatiale, l'équation (3.53) s'écrit avec les coordonnées normalisées :

$$\frac{\partial f_1(v_1,t_1)}{\partial t_1} - E'_{o\alpha} \cos t'_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\alpha}} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > f_1$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{o} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta} \partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \sigma \, d\sigma \, f_1$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} K \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \sigma \, d\sigma \, f_1 \right.$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha} \partial v_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} K \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \right. d\sigma \, f_1$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left[\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \right] \int_{-\infty}^{o} < \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \sigma \, d\sigma \, f_1$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left[\frac{\partial}{\partial v_{1\beta}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \right] \int_{-\infty}^{o} < \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 > \, d\sigma \, f_1 \tag{4.12}$$

où nous avons remplacé la limite inférieure (-t) de l'intégrale par (-∞) puisque nous nous intéressons à des temps longs comparés au temps de corrélation. De plus, nous avons posé :

$$\left[\begin{array}{l} \phi_1 = \sum_{j=2}^{N} \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_j) = \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_j|} \\ \\ E'_{o\alpha} = \frac{r_o \, e}{m \, v_o^2} E_\alpha \quad \text{et} \quad t'_1 = \omega_o \frac{r_o}{v_o} t_1 \end{array} \right. \tag{4.13}$$

Rappelons que ϕ_1 est relié aux coordonnées ordinaires par $\phi_1^* = \frac{e^2}{r_o} \phi_1$.

Nous allons maintenant étudier les différents termes de (4.12) en effectuant les développements proposés au paragraphe précédent et en ne conservant que les temps d'ordre 1 en ε.

1° - Terme du type

$$I = \varepsilon \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

Ce terme s'écrit :

$$I = \varepsilon \left\langle \sum_{j=2}^{N} \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_j(t_1))}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

$$= \varepsilon \int \sum_{j=2}^{N} \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_j(t_1))}{\partial x_{1\alpha}} \frac{1}{V} g_{1/1}\ (\xi_j, t_1/\alpha_1, o)\ d\xi_j$$

$$= \varepsilon \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} g_{1/1}\ (\xi_2, t_1/\alpha_1, o)\ d\xi_2$$

$$= \pi_{cd} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} g_{1/1}\ (\xi_2, t_1/\alpha_1, o)\ d\xi_2 \qquad (4.14)$$

Nous avons utilisé ci-dessus l'hypothèse de l'indiscernabilité des particules et nous avons posé :

$$\pi_{cd} = \pi_{co} \cdot \pi_d = \varepsilon\ n_o\ r_o^3$$

. Dans le cas A_1 où $n_o\ r_o^3 \sim 1$, nous avons $\pi_{cd} \sim \varepsilon$.

Comme pour ce cas A_1 nous voulons garder les termes d'ordre inférieur ou égal à 2, il faut calculer $g_{1/1}$ à l'ordre un.

. Dans le cas A_2 où $n_o\ r_o^3 \sim 1/\varepsilon$, nous avons $\pi_{cd} \sim 1$.

et il faut aussi calculer $g_{1/1}$ à l'ordre un, puisque nous nous contentons d'évaluer les termes à l'ordre un dans ce cas.

. Dans le cas B où

$$n_o\ r_o^3 = n_o\ x_E^3 = n_o\ \lambda_D^3 \left(\frac{x_E}{\lambda_D}\right)^3 = \left(\frac{\omega_p}{\omega_o}\right)^3 \left(\frac{2\ W_E}{KT}\right)^{3/2} n_o\ \lambda_D^3$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\ \varepsilon}$$

nous avons : $\pi_{cd} \sim \frac{1}{\gamma^2} \sim 1$.

Là encore, nous devons calculer $g_{1/1}$ à 1'ordre un.

En définitive, dans les trois cas, pour connaître le terme I à 1'ordre choisi, il est nécessaire de calculer $g_{1/1}$ à 1'ordre un.

2° - Terme du type

$$J = \varepsilon^2 < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 >$$

il s'écrit :

$$J = \varepsilon^2 < \sum_{\substack{k,j>1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_j)}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi \left[\vec{x}_1 + \vec{v}_1 \sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}'_k \right]}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 >$$

$$+ \varepsilon^2 < \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_k)}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi \left[\vec{x}_1 + \vec{v}_1 \sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}'_k \right]}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 >$$

$$= \frac{\varepsilon^2 (N-1)(N-2)}{V^2} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi \left[\vec{x}_1 + \vec{v}_1 \sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}'_3 \right]}{\partial x_{1\beta}} \; g_{2/1}(\xi_2 t_1 ; \xi'_3 t_1 + \sigma/\alpha_1, o) \cdot d\xi_2 \, d\xi'_3$$

$$+ \varepsilon^2 (N-1) \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi \left[\vec{x}_1 + \vec{v}_1 \sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}'_2 \right]}{\partial x_{1\beta}} \; D_{2,2/1}(\xi_2, t_1 ; \xi'_2 t_1 + \sigma/\alpha_1, o) \cdot d\xi_2 \, d\xi'_2 \qquad (4.15)$$

Nous allons maintenant étudier séparément les deux derniers termes de l'équation (4.15) ci-dessus :

α) terme contenant $g_{2/1}$

Compte tenu du fait que $(N-1)(N-2)/V^2 = \pi_d^2$, le terme contenant $g_{2/1}$ s'écrit :

$$J_1 = \pi_{cd}^2 \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \; \frac{\partial \phi \left[\vec{x}_1 + \vec{v}_1 \sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}'_3 \right]}{\partial x_{1\beta}} \; g_{2/1}(\xi_2, t_1 ; \xi'_3, t_1 + \sigma/\alpha_1, o) . d\xi_2 \, d\xi'_3$$

. Cas A_1 ($\pi_{cd} \sim \varepsilon$ - Calcul à l'ordre 2).

Il faut donc calculer $g_{2/1}$ à 1'ordre zéro qui, d'après le paragraphe IV.1, est égal à :

$$g_{2/1}(\xi_2, t_1 ; \xi'_3, t_1 + \sigma/\alpha_1, o) = f_1(\xi_2, t_1) \; f_1(\xi'_3, t_1 + \sigma)$$

Ceci entraîne donc que $J_1 = 0$ à cause de l'homogénéité spatiale.

. Cas A_2 et B ($\pi_{cd} \sim 1$ - Calcul à l'ordre 1).

Il faut calculer $g_{2/1}$ à 1'ordre un. Or :

$$g_{2/1}(\xi_2,t_2;\xi_3,t_3/\xi_1,t_1) = V^2 \frac{D(1,2,3)}{D(1)}$$

et en développant en cumulant à l'ordre un :

$$g_{2/1}(\xi_2,t_2;\xi_3,t_3/\xi_1,t_1) = V^2 \left\{ D(2)\ D(3) + P(2,3) + \frac{D(2)}{D(1)} P(1,3) + \frac{D(3)}{D(1)} P(1,2) \right\}$$

Mais : $P(i,j) = D(i,j) - D(i)\ D(j)$

ce qui entraîne que :

$$g_{2/1}(2,3/1) = V^2 \left[-2D(2)D(3) + D(2,3) + \frac{D(2)}{D(1)} D(1,3) + \frac{D(3)}{D(1)} D(1,2) \right]$$

$$= -2f_1(2)\ f_1(3) + f_2(2,3) + f_1(2)\ g_{1/1}(3/1) + f_1(3)\ g_{1/1}(2/1)$$

Reportons ceci dans J_1 et tenons compte de l'homogénéité spatiale, il vient :

$$J_1 = \pi_{cd}^2 \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_3']}{\partial x_{1\beta}}$$

$$\cdot f_1^\circ(\xi_3',t_1+\sigma)\ g_{1/1}(\xi_2,t_1/\xi_3',t_1+\sigma)\ d\xi_2\ d\xi_3' \qquad (4.16)$$

car : $f_2(2,3) = V^2\ D(2,3) = V^2\ D(2/3)\ D(3) = f_1(3)\ g_{1/1}(2/3)$.

β) terme contenant $D_{2,\ 2/1}$

Ce terme s'écrit :

$$J_2 = \pi_{cd}\ \pi_{co}\ V \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,\ t_1,t_1)\ -\ \vec{x}_2']}{\partial x_{1\beta}}$$

$$\cdot D_{2,2/1}(\xi_2,t_1;\xi_2',t_1+\sigma/\alpha_1,o)\ d\xi_2\ d\xi_2'$$

Pour que ce terme soit du bon ordre dans chacun des 3 cas, il faut prendre $D_{2,\ 2/1}$ à l'ordre zéro, c'est-à-dire d'après (4.6) :

$$D_{2,2/1}(\xi_2,t_2;\xi_2',t_2'/\xi_1,t_1) = D(\xi_2,t_2)\ \delta\left(\vec{x}_2'-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_2'-t_2) + \vec{E}_o(t_2',t_2,t_2)\right)$$

$$\cdot\delta\left(\vec{v}_2'-\vec{v}_2-\vec{E}_o(t_2',t_2)\right)$$

On obtient alors pour J_2 :

$$J_2 = \pi_{cd}\ \pi_{co} \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_2+(\vec{v}_1-\vec{v}_2)\sigma]}{\partial x_{1\beta}}\ f_1^\circ(\xi_2,t_1)\ d\xi_2 \qquad (4.17)$$

Nous pouvons donc écrire finalement :

- Cas A_1 :

$$\varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

$$= \pi_{cd}\, \pi_{co} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\sigma\,]}{\partial x_{1\beta}} f_1^{\circ}(\xi_2, t_1)\, d\xi_2 \qquad (4.18)$$

- Cas A_2 et B :

$$\varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

$$= \pi_{cd}^2 \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 + \vec{v}_1\sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}_3']}{\partial x_{1\beta}} f_1^{\circ}(\xi_3', t_1+\sigma)$$

$$\cdot\, g_{1/1}(\xi_2, t_1 / \xi_3', t_1+\sigma)\, d\xi_2\, d\xi_3'$$

$$+ \pi_{cd}\, \pi_{co} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\sigma\,]}{\partial x_{1\beta}} f_1^{\circ}(\xi_2, t_1)\, d\xi_2 \qquad (4.19)$$

Notons qu'à l'ordre cherché, ce terme ne dépend plus de la condition $\xi_1(o) = \alpha_1$;

$$\left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle$$

3° - Terme du type

$$K = \varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

Ce terme va s'écrire :

$$K = \pi_{cd}^2 \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial x_{1\alpha}} g_{1/1}(\xi_2, t_2/\alpha_1, o)\, d\xi_2 \int \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{v}_1\sigma - \vec{E}_o(t_1+\sigma, t_1, t_1) - \vec{x}_3']}{\partial x_{1\beta}}$$

$$\cdot\, g_{1/1}(\xi_3', t_1+\sigma/\alpha_1, o)\, d\xi_3'$$

Pour que ce terme K soit d'ordre un, il faut forcément que l'un des deux $g_{1/1}$ soit d'ordre zéro ; mais alors il sera égal à f_1 et l'intégrale sera nulle par l'homogénéité spatiale :

$$K = 0 \text{ à l'ordre considéré.}$$

Compte tenu des résultats précédents, nous allons pouvoir écrire l'équation d'évolution de f_1 sous une nouvelle forme. Avant cela remarquons que :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle f_1 = \left\langle \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta} \partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle f_1 + \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial^2 \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}^2} \right\rangle f_1$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta} \partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle f_1 + \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial^2 \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta} \partial v_{1\beta}} \right\rangle \frac{f_1}{\sigma}$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta} \partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle f_1 + \frac{\partial}{\partial v_{1\beta}} \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle \frac{f_1}{\sigma}$$

$$- \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle \frac{1}{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\beta}}$$

Alors l'équation (4.12) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - E'_{o\alpha} \cos t'_1 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \right] f_1(v_1, t_1)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle f_1^\circ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{o} \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} \right\rangle d\sigma \frac{\partial f_1^\circ}{\partial v_{1\beta}} \qquad (4.20)$$

où les différentes moyennes sont obtenues grâce aux équations :

(4.14) et (4.18) pour le cas A_1

(4.14) et (4.19) pour les cas A_2 et B.

b) Coordonnées initiales

Nous allons maintenant écrire l'équation (4.20) dans le système de coordonnées initiales non-normalisées ; il vient :

$$\frac{\partial f_1(v_1,t_1)}{\partial t_1} - \frac{e \vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \vec{\mathcal{F}}_f(v_1,t_1) f_1^\circ + \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1,t_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} f_1^\circ \qquad (4.21)$$

où : $\vec{\mathcal{F}}_f$ représente le terme de friction et s'écrit :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(v_1,t_1) = \frac{e}{m} \left\langle \vec{E}/\xi_1(o) = \alpha_1 \right\rangle$$

$$= \frac{n_o}{m} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\partial \vec{x}_1} \delta g_{1/1}(\xi_2, t_1/\alpha_1, o) \, d\xi_2 \qquad (4.22)$$

quels que soient les cas A_1, A_2 et B.

et où $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ représente le terme de diffusion et s'écrit :

- Cas A_1 :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1,t_1) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^{o} . \langle \vec{E}\ \vec{E}_\sigma \rangle . \, d\sigma$$

$$= \frac{n_o}{m^2} \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int . \frac{\partial\phi\left|(\vec{x}_1-\vec{x}_3)\right|}{\partial\vec{x}_1} \cdot \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1-\vec{x}_3+(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\sigma\right|}{\partial\vec{x}_1} . f_1^o(\xi_3,t_1)\, d\xi_3 \tag{4.23}$$

d'après l'équation (4.18).

- Cas A_2, B :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1,t_1) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^{o} . \langle \vec{E}\ \vec{E}_\sigma \rangle \, . \, d\sigma$$

$$= \left(\frac{n_o}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int . \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial\vec{x}_1} \cdot \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_4\right|}{\partial\vec{x}_1} .$$

$$. \, f_1^o(\xi_4,t_1+\sigma)\ \delta g_{1/1}(\xi_3,t_1/\xi_4,t_1+\sigma)\ d\xi_3\ d\xi_4$$

$$+ \frac{n_o}{m^2} \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial\vec{x}_1} \cdot \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1-\vec{x}_3+(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\sigma\right|}{\partial\vec{x}_1} f_1^o(\xi_3,t_1)\, d\xi_3 \tag{4.24}$$

d'après l'équation (4.19)

Revenons maintenant à l'équation (4.21), afin d'expliquer la signification physique des termes du membre de droite. Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{e}{m}\vec{E}_o \cos\omega_o t_1 . \frac{\partial}{\partial\vec{v}_1}\right] f_1(v_1,t_1) = \frac{\partial}{\partial\vec{v}_1} . \vec{\mathcal{F}}_f^*(v_1,t_1)\ f_1^o(v_1) + \frac{\partial^2}{\partial\vec{v}_1\ \partial\vec{v}_1} \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1,t_1)$$

$$f_1^o(v_1) \tag{4.25}$$

où : $$\vec{\mathcal{F}}_f^* = \mathcal{F}_f - \frac{\partial}{\partial\vec{v}_1} . \overleftrightarrow{\mathfrak{D}} \tag{4.26}$$

On voit alors que $\vec{\mathcal{F}}_f^*$ est la friction dynamique [23], [33][34]. En ce qui concerne $\mathcal{F}_f$, l'équation (4.22) nous indique que cette quantité représente le champ moyen en x_1 dû aux "particules du champ" influencées par la "particule test". Ceci s'exprime au moyen de la fonction de distribution conditionnelle $g_{1/1}$ pour les "particules du champ", sachant que la "particule test" était en α_1 à t = 0 (nous

appelons ci-dessus "particule test" la particule que l'on observe et dont nous voulons calculer la fonction de distribution, et "particules du champ" les autres particules du système). $\vec{\mathcal{F}}_f$ est donc la friction par polarisation.

Le second terme de l'équation (4.26) représente l'amortissement résultant des corrélations des forces sur la "particule test" à différents temps.

IV.3 - EQUATION DE $\delta g_{1/1}$

Comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent, pour f_1, nous allons étudier l'équation d'évolution de $\delta g_{1/1}$ en utilisant les développements proposés dans l'introduction de ce chapitre.

a) - Coordonnées normalisées

Nous allons utiliser dans ce paragraphe les coordonnées normalisées (3.4), mais dans le but de simplifier l'écriture nous noterons les coordonnées normalisées sans astérique , réservant ce signe aux anciennes coordonnées (voir paragraphe IV.2). Alors l'équation (3.54) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + v_{1\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} - E'_{o\alpha}\cos t'_1 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\right] g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1,\ \xi_2(t_2) = \xi_2 > g_{1/1}$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{o} < \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta}\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1, \xi_2(t_2) = \xi_2 > \sigma\, d\sigma\, g_{1/1}$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\partial x_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} K\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1,\ \xi_2(t_2) = \xi_2\right] \sigma\, d\sigma\, g_{1/1}$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha}\partial v_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} K\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1,\ \xi_2(t_2) = \xi_2\right] d\sigma\, g_{1/1}$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial x_{1\beta}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 >\right] \int_{-\infty}^{o} < \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 > \sigma d\sigma g_{1/1}$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial v_{1\beta}} < \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 >\right] \int_{-\infty}^{o} < \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 > d\sigma g_{1/1}$$

(4.27)

(voir équation (4.13) pour les définitions de ϕ_1, $E'_{o\alpha}$ et t'_1).

Rappelons, avant d'aller plus loin, ce que nous avons noté au paragraphe précédent :

- Cas A_1 : $\pi_{co} \sim \varepsilon$ $\quad$ $\pi_{cd} \sim \varepsilon$

- Cas A_2 et B : $\pi_{co} \sim \varepsilon$ $\quad$ $\pi_{cd} \sim 1$

- Pour pouvoir obtenir une équation d'évolution indépendante pour f_1, il est nécessaire de calculer g$_{1/1}$ à l'ordre un.

Nous allons donc maintenant étudier les différents termes de l'équation (4.27) en ne conservant que ceux d'ordre un.

1° - Terme du type :

$$I = \varepsilon \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1,\ \xi_2(t_2) = \xi_2 \right\rangle$$

Ce terme s'écrit :

$$I = \varepsilon \left\langle \sum_{j=3}^{N} \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}_j(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 \right\rangle + \varepsilon \left\langle \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}'_2(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1, \xi_2(t_2)=\xi_2 \right\rangle$$

$$= \pi_{cd} \int \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}_3]}{\partial x_{1\alpha}} g_{1/2}(\xi_3, t_1/\alpha_1, o; \xi_2, t_2)\, d\xi_3$$

$$+ \pi_{co} \int \frac{\partial \phi[\vec{x}_1 - \vec{x}'_2]}{\partial x_{1\alpha}} D_{2/1,2}(\xi'_2, t_1/\alpha_1, o; \xi_2, t_2)\, d\xi'_2 \qquad (4.28)$$

Regardons séparément les 2 termes de I :

α) Terme en $g_{1/2}$:

. Cas A_1 ($\pi_{cd} \sim \varepsilon$)

Il faut donc calculer $g_{1/2}$ à l'ordre zéro, soit :

$$g_{1/2}(\xi'_3, t_1/\xi_1, o; \xi_2, t_2) = f_1(\xi'_3, t_1)$$

ce terme sera donc nul d'après (4.11),(homogénéité spatiale).

. Cas A_2 et B ($\pi_{cd} \sim 1$)

Nous savons que par définition :

$$g_{1/2}(\xi_3, t_3/\xi_1, t_1; \xi_2, t_2) = V \frac{D(1,2,3)}{D(1,2)}$$

soit à 1'ordre considéré :

$$g_{1/2}(3/1,2) = V \frac{D(1)\ D(2)\ D(3) + \sum_{i\neq j\neq k} D(i)\ P(j,k) + o(\varepsilon^2)}{D(1)\ D(2) + P(1,2) + o(\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{V}{D(1)\ D(2)} \left[\frac{D(1)\ D(2)\ D(3) + \sum_{i\neq j\neq k} D(i)\ P(j,k) + o(\varepsilon^2)}{1 + \frac{P(1,2)}{D(1)\ D(2)} + o(\varepsilon^2)} \right]$$

$$= \frac{V}{D(1)\ D(2)} \left[D(1)\ D(2)\ D(3) \left(1 - \frac{P(1,2)}{D(1)D(2)} \right) + \sum_{i\neq j\neq k} D(i)\ P(j,k) + o(\varepsilon^2) \right]$$

$$= V \left[D(3) + \frac{P(1,3)}{D(1)} + \frac{P(2,3)}{D(2)} \right]$$

$$= - f_1(3) + g_{1/1}\ (3/1) + g_{1/1}(3/2) \qquad (4.29)$$

où nous avons utilisé le fait que :

$$P(i,j) = D(i,j) - D(i)\ D(j)$$

Grâce à (4.29), le terme en $g_{1/2}$ s'écrit :

$$\pi_{cd} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ g_{1/2}(\xi_3, t_1/\alpha_1, o; \xi_2 t_2)\ d\xi_3$$

$$= \pi_{cd} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}} \left[- f_1(\xi_3, t_1) + g_{1/1}(\xi_3, t_1/\alpha_1, o) + g_{1/1}(\xi_3, t_1/\xi_2, t_2 \right] d\xi_3$$

En tenant compte de l'homogénéité spatiale :

$$\int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ f_1(v_3, t_2)\ dx_3\ dv_3 = 0$$

Il reste :

$$\pi_{cd} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ g_{1/1}(\xi_3, t_1/\alpha_1, o)\ d\xi_3 + \pi_{cd} \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ g_{1/1}(\xi_3, t_1/\xi_2, t_2)\ d\xi_3 \qquad (4.30)$$

β) Terme en $D_{2/1,2}$

Dans les trois cas ce terme est déjà d'ordre un et par conséquent il faut prendre $D_{2/1,2}$ à l'ordre zéro. Or :

$$D_{2/1,2}(\xi_2', t_1/\alpha_1, o; \xi_2, t_2) = \frac{D(\xi_2', t_1; \alpha_1, o; \xi_2, t_2)}{D(\alpha_1, o; \xi_2, t_2)}$$

et à l'ordre zéro :

$$D_{2/1,2}(\xi_2',t_1/\alpha_1,o;\xi_2,t_2) =$$

$$= \frac{D(\alpha_1,o)\ D(\xi_2,t_2)\ \delta\left|\vec{x}_2'-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right| \cdot \delta\left|\vec{v}_2'-\vec{v}_2-\vec{E}_o(t_1,t_2)\right|}{D(\alpha_1,o)\ D(\xi_2,t_2)}$$

$$= \delta\left[\vec{x}_2'-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right] \cdot \delta\left[\vec{v}_2'-\vec{v}_2-\vec{E}_o(t_1,t_2)\right]$$

Le terme en $D_{2/1,2}$ devient alors :

$$\varepsilon\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_2')}{\partial x_{1\alpha}} \cdot D_{2/1,2}(\xi_2',t_1/\alpha_1,o;\xi_2,t_2)\ d\xi_2'$$

$$= \varepsilon\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_2')}{\partial x_{1\alpha}}\ \delta\left[\vec{x}_2'-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right]\ \delta\left[(\vec{v}_2'-\vec{v}_2-\vec{E}_o(t_1,t_2)\right]\ d\xi_2'$$

$$= \varepsilon\ \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right]}{\partial x_{1\alpha}} \qquad (4.31)$$

Finalement le terme I s'écrit :

- Cas A_1 :

$$I = \pi_{co}\ \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right]}{\partial x_{1\alpha}} \qquad (4.32)$$

- Cas A_2 et B :

$$I = \pi_{cd}\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ g_{1/1}\ (\xi_3,t_1/\alpha_1,o)\ d\xi_3$$

$$+\ \pi_{cd}\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}} g_{1/1}\ (\xi_3,t_1/\xi_2,t_2)\ d\xi_3$$

$$+\ \pi_{co}\ \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right]}{\partial x_{1\alpha}} \qquad (4.33)$$

2° - <u>Terme du type</u> :

$$J = \varepsilon^2 <\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{1\alpha}}\frac{\partial\phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}}\ /\xi_1(o) = \alpha_1\ ;\ \xi_2(t_2) = \xi_2 >$$

Ce terme s'écrit :

$$J = \varepsilon^2 \Big\langle \sum_{j\neq k=3}^{N} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_j(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_k(t_1+\sigma)]}{\partial x_{1\beta}} \Big/ \xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2 \Big\rangle \quad ①$$

$$+ \varepsilon^2 \Big\langle \sum_{k=3}^{N} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_k(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_k(t_1+\sigma)]}{\partial x_{1\beta}} \Big/ \xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2 \Big\rangle \quad ②$$

$$+ \varepsilon^2 \Big\langle \sum_{k=3}^{N} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_2(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_k(t_1+\sigma)]}{\partial x_{1\beta}} \Big/ \xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2 \Big\rangle \quad ③$$

$$+ \varepsilon^2 \Big\langle \sum_{k=3}^{N} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_k(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_2(t_1+\sigma)]}{\partial x_{1\beta}} \Big/ \xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2 \Big\rangle \quad ④$$

$$+ \varepsilon^2 \Big\langle \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_2(t_1)]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_2(t_1+\sigma)]}{\partial x_{1\beta}} \Big/ \xi_1(o)=\alpha_1;\xi_2(t_2)=\xi_2 \Big\rangle \quad ⑤$$

Etudions maintenant séparément les cinq termes ci-dessus :

a) Terme ①

Il s'écrit :

$$① = \pi_{cd}^2 \int \frac{\partial\phi[\vec{x}_1-\vec{x}_3]}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_4]}{\partial x_{1\beta}} \cdot g_{2/2}(\xi_3,t_1;\xi_4,t_1+\sigma/\alpha_1,o;\xi_2,t_2)\, d\xi_3\, d\xi_4$$

. Cas A_1 ($\pi_{cd} \sim \varepsilon$) :

Ce terme est donc d'ordre 2 et par conséquent il sera négligé puisque nous cherchons à calculer $g_{1/1}$ à l'ordre un.

. Cas A_2 et B ($\pi_{cd} \sim 1$) :

A l'ordre un, $g_{2/2}$ se met sous la forme :

$$g_{2/2}(3,4/1,2)=V^2\,\frac{D(1,2,3,4)}{D(1,2)}=\frac{V^2}{D(1)D(2)}\left[\frac{D(1)D(2)D(3)D(4)+\sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} D(i)D(j)P(k,\ell)+o(\varepsilon^2)}{1+\frac{P(1,2)}{D(1)D(2)}+o(\varepsilon^2)}\right]$$

$$=\frac{V^2}{D(1)D(2)}\left[D(1)D(2)D(3)D(4)\left(1-\frac{P(1,2)}{D(1)D(2)}\right)+\sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} D(i)D(j)P(k,\ell)+o(\varepsilon^2)\right]$$

$$=-4f_1(3)f(4)+V^2D(3,4)+V\frac{f_1(3)}{D(2)}D(2,4)+V\frac{f_1(4)}{D(2)}D(2,3)$$

$$+V\frac{f_1(3)}{D(1)}D(1,4)+V\frac{f_1(4)}{D(1)}D(1,3)$$

Alors en reportant dans ① et en tenant compte de l'homogénéité spatiale, il reste :

$$①=\pi_{cd}^2\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\,\frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_4]}{\partial x_{1\beta}}\,V^2D(\xi_3,t_1;\xi_4,t_1+\sigma).d\xi_3\,d\xi_4$$

Or :

$$V^2D(\xi_3,t_1;\xi_4,t_1+\sigma)=V^2D(\xi_3,t_1/\xi_4,t_1+\sigma)\;D(\xi_4,t_1+\sigma)$$

$$=f_1(\xi_4,t_1+\sigma)\;g_{1/1}(\xi_3,t_1/\xi_4,t_1+\sigma)$$

d'où :

$$①=\pi_{cd}^2\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\,\frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_4]}{\partial x_{1\beta}}\,f_1^\circ(\xi_4,t_1+\sigma)$$

$$.\;\delta g_{1/1}(\xi_3,t_1/\xi_4,t_1+\sigma)\;d\xi_3\,d\xi_4 \qquad (4.34)$$

b) Terme ②

Il s'écrit :

$$②=\varepsilon\pi_{cd}\int\frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\,\frac{\partial\phi[\vec{x}_1+\vec{v}_1\alpha-\vec{E}_o(t_1+\alpha,t_1,t_1)-\vec{x}_3']}{\partial x_{1\beta}}$$

$$.\;D_{3,3/1,2}(\xi_3,t_1;\xi_3',t_1+\sigma/\alpha_1,o;\xi_2,t_2)\;d\xi_3\,d\xi_3'$$

. Cas A_1 ($\pi_{cd}\sim\varepsilon$) :

Ce terme sera négligé car il est d'ordre 2.

. Cas A_2 et B ($\pi_{cd}\sim 1$) :

Pour que ce terme soit d'ordre un, il faut prendre $D_{3,3/1,2}$ à l'ordre zéro,

c'est-à-dire :

$$D_{3,3/1,2}(\xi_3,t_1;\xi_3',t_1+\sigma/\alpha_1,o;\xi_2,t_2) =$$

$$= \delta\left[\vec{x}_3'-\vec{x}_3-\vec{v}_3\sigma+\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)\right]\ \delta\left[\vec{v}_3'-\vec{v}_3-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1)\right]\ .\ D(\xi_3,t_1)$$

d'où :

$$② \quad = \varepsilon\pi_{cd}\int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1-\vec{x}_3+(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\sigma\right|}{\partial x_{1\beta}}\ f_1^o(\xi_3,t_1)\ d\xi_3 \qquad (4.35)$$

c) Terme ③

. Cas A_1 :

Ce terme est négligé car il est d'ordre 2.

. Cas A_2 et B :

Ce terme est d'ordre un, il faut donc calculer la densité de probabilité $D_{2,3/1,2}$ à l'ordre zéro, c'est-à-dire :

$$V^2\ D_{2,3/1,2}(\xi_2',t_1;\xi_3,t_1+\sigma/\alpha_1,o;\xi_2,t_2)$$

$$= f_1(\xi_3,t_1+\sigma)\ \delta\left[\vec{x}_2'-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2)+\vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)\right]\ .\delta\left[\vec{v}_2'-\vec{v}_2-\vec{E}_o(t_1,t_2)\right]$$

et alors, par homogénéité spatiale :

$$\int \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_3\right]}{\partial x_{1\beta}}\ f_1(\xi_3,t_1+\sigma)\ d\xi_3 = o$$

Le terme 3 est donc nul à l'ordre considéré.

d) Terme ④

Pour les mêmes raisons, ce terme est nul à l'ordre considéré.

e) Terme ⑤

Ce terme est d'ordre deux, on va donc le négliger.

On obtient donc finalement :

- Cas A_1 : J = O
- Cas A_2 et B :

$$J = \pi_{cd}^2\int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1+\vec{v}_1\sigma-\vec{E}_o(t_1+\sigma,t_1,t_1)-\vec{x}_4\right|}{\partial x_{1\beta}}\ f_1^o(\xi_4,t_1+\sigma)\ \delta g_{1/1}(\xi_3,t_1/\xi_4,t_1+\sigma)$$

$$\cdot\ d\xi_3\ d\xi_4$$

$$+\ \varepsilon\pi_{cd}\int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}{\partial x_{1\alpha}}\ \frac{\partial\phi\left|\vec{x}_1-\vec{x}_3+(\vec{v}_1-\vec{v}_3)\sigma\right|}{\partial x_{1\beta}}\ f_1^o(\xi_3,t_1)\ d\xi_3 \qquad (4.36)$$

On constate, ici aussi, que ces termes ne dépendent plus des conditions $\xi_1(o) = \alpha_1$ et $\xi_2(t_2) = \xi_2$:

$$<\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \; ; \; \xi_2(t_2) = \xi_2> \; = <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}}>$$

3° - Terme du type :

$$K = \varepsilon^2 <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o) = \alpha_1 \; ; \; \xi_2(t_2) = \xi_2> < \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}} / \xi_1(o)=\alpha_1 \; ; \; \xi_2(t_2) = \xi_2>$$

D'après (4.32) et (4.33), ces termes seront nuls à l'ordre considéré soit parce que certains des termes qui les composent sont d'ordre deux, soit à cause de l'homogénéité spatiale.

Finalement l'équation (4.27) se réduit à :

- Cas A_1 :

$$\frac{\partial}{\partial t_1} g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2) + v_{1\alpha} \frac{\partial g_{1/1}}{\partial x_{1\alpha}} - E'_{o\alpha} \cos t'_1 \frac{\partial g_{1/1}}{\partial v_{1\alpha}}$$

$$= \pi_{co} \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \frac{\partial \Phi[\vec{x}_1-\vec{x}_2-\vec{v}_2(t_1-t_2) + \vec{E}_o(t_1,t_2,t_2)]}{\partial x_{1\alpha}} f_1^\circ \qquad (4.37)$$

- Cas A_2 et B :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + v_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} - E'_{o\alpha} \cos t'_1 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\right] g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1; \; \xi_2(t_2) =\xi_2> g_{1/1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{o} <\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_{1\beta} \partial x_{1\beta}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_1}>\sigma \, d\sigma \, g_{1/1}$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}}>\sigma \, d\sigma \, g_{1/1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{1\alpha} \partial v_{1\beta}} \int_{-\infty}^{o} <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}}> d\sigma \, g_{1/1}$$

Mais en regardant (4.33) et (4.36), on s'aperçoit que l'on doit prendre $g_{1/1}$ à l'ordre zéro dans le second membre de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire $g_{1/1} = f_1^\circ$. Il vient donc en regroupant les termes :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + v_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} - E'_{o\alpha} \cos t'_1 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}}\right] g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} / \xi_1(o)=\alpha_1; \xi_2(t_2)=\xi_2> f_1^\circ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial v_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{o} <\frac{\partial \phi_1}{\partial x_{1\alpha}} \frac{\partial \phi_{1\sigma}}{\partial x_{1\beta}}> d\sigma \frac{\partial f_1^\circ}{\partial v_{1\beta}} \qquad (4.38)$$

où les différentes moyennes sont calculées grâce à (4.33) et (4.36).

b) - Coordonnées initiales

Revenons maintenant aux coordonnées initiales et écrivons les équations (4.37) et (4.38) dans ce répère.

- Cas A_1 :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\right] g_{1/1}(\xi_1, t_1/\xi_2, t_2)$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \phi\left[\vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{v}_2(t_1 - t_2) + \vec{E}_o(t_1, t_2, t_2)\right] f_1^o \qquad (4.39)$$

- Cas A_2 et B :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos\,\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\right] g_{1/1}(\xi_1, t_1/\xi_2, t_2)$$

$$= \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \langle \vec{E}/\xi_1(o) = \alpha_1 ; \xi_2(t_2) = \xi_2 \rangle f_1^o + \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1, t_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} f_1^o \qquad (4.40)$$

où $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ est donné par (4.24).

Utilisons maintenant pour $g_{1/1}$ le développement (4.9) et retranchons les équations (4.20) et (4.40) membre à membre, il vient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\right] \delta g_{1/1}(\xi_1, t_1/\xi_2, t_2)$$

$$= \frac{n_o}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{\partial \vec{x}_1} \delta g_{1/1}(\xi_3, t_1/\xi_2, t_2)\, d\xi_3\, f_1^o(\xi_1, t_1)$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \frac{\partial \phi\left[\vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{v}_2(t_1 - t_2) + \vec{E}_o(t_1, t_2, t_2)\right]}{\partial \vec{x}_1} f_1^o(\xi_1, t_1) \qquad (4.41)$$

On aurait pu évidemment écrire l'équation ci-dessus en inversant le rôle de ξ_1 et ξ_2. On obtiendrait alors, en faisant $t_1 = 0$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_2} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2}\right] \delta g_{1/1}(\xi_2, t_2/\alpha_1, o)$$

$$= \frac{n_o}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \cdot \int \frac{\partial \phi[\vec{x}_2 - \vec{x}_3(t_2)]}{\partial \vec{x}_2} \delta g_{1/1}\,(\xi_3, t_2/\alpha_1, o)\, d\xi_3\, f_1^o(v_2, t_2)$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \cdot \frac{\partial \phi[\vec{x}_2 - \vec{x}_{\alpha_1} - \vec{v}_{\alpha_1}\, t_2 + \vec{E}_o(t_2, o, o)]}{\partial \vec{x}_2} f_1^o(v_2, t_2) \qquad (4.42)$$

où : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \vec{x}_{\alpha_1} \\ \vec{v}_{\alpha_1} \end{pmatrix}$

Après avoir tronqué notre hiérarchie d'équations, nous sommes arrivés, dans les trois cas, à un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \text{(4.20) et (4.37)} & \text{pour } A_1 \\ \text{(4.20) et (4.42)} & \text{pour } A_2 \text{ et } B. \end{cases}$$

Le problème est donc maintenant de calculer $g_{1/1}$ en fonction de f_1 à l'aide de l'équation (4.37), (ou (4.42) suivant les cas), pour pouvoir ensuite reporter la valeur trouvée dans l'équation (4.20) et obtenir ainsi une équation cinétique pour f_1. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

IV.4 - EQUATIONS CINETIQUES

Afin de pouvoir effectuer les calculs que nous nous proposons de faire, nous allons effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \vec{y} = \vec{x} - \dfrac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o^2} \cos \omega_o t \\ \vec{u} = \vec{v} + \dfrac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o} \sin \omega_o t \\ \tau = t \end{cases} \qquad (4.43)$$

qui va nous placer dans un repère oscillant avec le champ. Dans ce repère, les particules sont animées de mouvements qui se rapprochent de ceux qu'elles auraient en l'absence de champ extérieur. Ceci nous permet de penser que les techniques de résolution mathématiques seront semblables à celles utilisées lorsqu'il n'y a pas de champ extérieur.

REMARQUES :

A l'ordre zéro en ε l'équation d'évolution de f_1 devient celle de f_1° : fonction de distribution des électrons sans interaction et soumis uniquement au champ extérieur :

$$\frac{\partial f_1^\circ(v,t)}{\partial t} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t \,.\, \frac{\partial f_1^\circ(v,t)}{\partial \vec{v}} = o \qquad (4.44)$$

Pour chercher la solution de cette équation, effectuons le changement de variables (4.43). On montre aisément que l'équation d'évolution de f_1° se réduit à :

$$\frac{\partial f_1^\circ(u,\tau)}{\partial \tau} = o$$

soit : $$f_1^\circ(u,\tau) = f_1^\circ(u,o) = f_1^\circ(u) \qquad (4.45)$$

On constate donc que dans le repr\`es $(\vec{y}, \vec{u}, \tau)$, la fonction de distribution f_1° est indépendante du temps.

Si nous revenons au système $(\vec{x}, \vec{v}, t)$, on a alors :

$$f_1^\circ(v_1,t) = f_1^\circ\left(\vec{v} + \frac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o} \sin \omega_o t\right) \qquad (4.46)$$

En particulier, si l'on admet que la fonction de distribution initiale avant l'application du champ extérieur était maxwellienne :

$$f_1^\circ(v,t) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \exp\left\{ - \frac{m}{2KT} \left[\vec{v} + \frac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o} \sin \omega_o t \right]^2 \right\}$$

Nous retrouvons ici un résultat déjà donné par SILIN [11],[35].

Outre le changement de variables (4.43), nous allons être amenés à utiliser des transformations de FOURIER sur l'espace et de LAPLACE sur le temps. A cet effet, précisons les définitions que nous allons utiliser :

- Transformation de FOURIER

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k}.\vec{x}}\ \varphi(k)\ dk \\ \varphi(k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{k}.\vec{x}}\ \varphi(x)\ dx \end{cases} \qquad (4.47)$$

- Transformation de LAPLACE

$$\begin{cases} \psi(t) = \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\alpha-ia}^{\alpha+ia} e^{pt}\ \psi(p)\ dp \\ \psi(p) = \displaystyle\int_{o}^{+\infty} e^{-pt}\ \psi(t)\ dt \end{cases} \qquad (4.48)$$

Nous allons maintenant étudier séparément les trois cas A_1, A_2 et B.

IV.4.1 - Cas A_1 : Champ extérieur faible ; couplage faible

A partir de l'équation (4.39) donnant l'évolution de $g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$, nous pouvons écrire celle de $g_{1/1}(\xi_2,t_2/\alpha_1,o)$ qui devient, après utilisation du changement de variables (4.43) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau_2} + \vec{u}_2.\frac{\partial}{\partial\vec{y}_2}\right] g_{1/1}(\eta_2,\tau_2/\eta_{\alpha 1},o) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\vec{u}_2}.\frac{\partial}{\partial\vec{y}_2}\,\phi\left[\vec{y}_2-\vec{y}_{\alpha 1}-\vec{u}_{\alpha 1}\,\tau_2\right] f_1^o(u_2)$$

où $\quad \xi = \begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{v}\end{pmatrix}$ se transforme en $\eta = \begin{pmatrix}\vec{y}\\ \vec{u}\end{pmatrix}$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix}x_{\alpha 1}\\ v_{\alpha 1}\end{pmatrix}$ se transforme en $\eta_{\alpha_1} = \begin{pmatrix}\vec{y}_{\alpha 1}\\ \vec{u}_{\alpha_1}\end{pmatrix}$

Si l'on se souvient que le dernier terme de l'équation ci-dessus a été obtenu en (4.31) en utilisant la densité de probabilité $D_{2/1,2}$ à l'ordre zéro, ce qui revient à considérer que les particules suivent une trajectoire non perturbée sinusoïdale, on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{x}_{\alpha 1} = \vec{x}_1 - v_1\,t_1 + \vec{E}_o(t_1,o,t_1) \\ \vec{v}_{\alpha 1} = \vec{v}_1 - \vec{E}_o(t_1,o) \end{cases}$$

d'où :

$$\phi\left[\vec{x}_2-\vec{x}_{\alpha 1}-\vec{v}_{\alpha 1}\,t_2 + \vec{E}_o(t_2,o,o)\right] = \phi\left[\vec{x}_2-\vec{x}_1-\vec{v}_1(t_2-t_1) + \vec{E}_o(t_2,t_1,t_1)\right] \qquad (4.49)$$

soit dans le repère $(\vec{y},\ \vec{u},\ \tau)$:

$$\phi\left[\vec{y}_2 - \vec{y}_{\alpha 1} - \vec{u}_{\alpha 1}\,\tau_2\right] = \phi\left[\vec{y}_2 - \vec{y}_1 - \vec{u}_1(\tau_2-\tau_1)\right] \qquad (4.50)$$

Nous utiliserons désormais cette expression dans l'équation d'évolution de $g_{1/1}(\eta_2,\tau_2/\eta_{\alpha 1},o)$. Alors, après transformation de FOURIER-LAPLACE, il vient :

$$(p_1+i\vec{k}_1-\vec{u}_2)\ g_{1/1}(k_2,u_2,p_1/\eta\alpha_1,o) - g_{1/1}(k_1,u_2,\tau=o/\eta\alpha_1,o)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{n_o}\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\cdot\frac{\partial f_1^o(u_2)}{\partial\vec{u}_2}\,\frac{\exp\left|-i\vec{k}_1.(\vec{y}_1-\vec{u}_1\tau_1)\right|}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \qquad (4.51)$$

Nous allons admettre, dans l'équation ci-dessus, que les corrélations induites par le champ extérieur sont prépondérantes et faire l'hypothèse de disparition des corrélations initiales :

$$g_{1/1}(k_1,u_2,\tau=o/\eta_{\alpha 1},o) = o$$

Revenons maintenant à l'équation (4.21) qui est l'équation d'évolution de f_1. Le terme de friction pour le cas A_1 s'écrit d'après (4.22) :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = \omega_p^2 \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{ik_1}{k_1^2} \exp\left\{ i\vec{k}_1.\vec{y}_1 + p_1\tau_1 \right\} \int du_2\, g_{1/1}(k_1,u_2,p_1/\eta\alpha_1,o)$$

$$= -\frac{\omega_p^4}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} \frac{\exp\left\{ (\rho_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1 \right\}}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \int \frac{du_2\ \vec{k}_1.\dfrac{\partial f_1^o(u_2)}{\partial \vec{u}_2}}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}_2}$$

$$= \frac{\omega_p^4}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp}{2i\pi} \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} \frac{e^{p\tau}}{p} \int \frac{du_2\ \vec{k}_1.\dfrac{\partial f_1^o(u_2)}{\partial \vec{u}_2}}{p + i\vec{k}_1.(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)}$$

En utilisant le théorème :

$$\lim_{\tau_1 \to \infty} \vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = \lim_{p \to o}\ p\ \vec{\mathcal{F}}_f(u_1,p)$$

sur les transformées de LAPLACE, nous obtenons la limite asymptotique de $\vec{\mathcal{F}}_f$:

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = -\frac{\omega_p^4}{n_o} \int \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} \int du_2\ \vec{k}_1 \cdot \frac{\partial f_1^o(u_2)}{\partial \vec{u}_2}\ \delta(\vec{k}_1.\vec{u}_2 - \vec{k}_1.\vec{u}_1) \qquad (4.52)$$

où nous avons aussi utilisé la formule de PLEMELJ et tenu compte du fait que le résultat devait être réel.

Si nous posons :

$$\begin{cases} F(w) = \int f^o(u)\ \ \delta\left(w - \dfrac{\vec{k}.\vec{u}}{k}\right) du \\ F'(w) = \int \dfrac{\partial f_1^o(u)}{\partial \vec{u}} \cdot \dfrac{\vec{k}}{k}\ \delta\left(w - \dfrac{\vec{k}.\vec{u}}{k}\right) du \end{cases} \qquad (4.53)$$

nous pouvons écrire l'équation (4.52) sous la forme :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = -\frac{\omega_p^4}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} F'\left(\frac{\vec{k}_1.\vec{u}_1}{k_1}\right) \qquad (4.54)$$

Quant au terme de diffusion, il est donné par l'équation (4.23) et il s'écrit, après changement de variables et tranformées de FOURIER-LAPLACE :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^4}{n_o}\int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{dk_2}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{y}_1}\, e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{y}_2}\cdot\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\frac{i\vec{k}_2}{k_2^2}\cdot$$

$$\cdot\, e^{i\vec{k}_2\cdot(\vec{u}_1-\vec{u}_3)\sigma}\, e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{y}_3}\, f_1^o(u_3)\, du_3\, dy_3$$

$$= \frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\,\delta(\vec{k}_1\cdot\vec{u}_1-\vec{k}_1\cdot\vec{u}_2)\, f_1^o(u_2)\, du_2$$

$$= \frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^5}\, F\left(\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{u}_1}{k_1}\right) \qquad (4.55)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation (4.21) pour f_1 :

$$\frac{\partial f_1(u_1,\tau_1)}{\partial\tau_1} = \frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\vec{u}_1}\cdot\frac{\vec{k}_1}{k_1^4}\left\{-F'\left(\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{u}_1}{k_1}\right) f_1^o(u_1) + F\left(\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{u}_1}{k_1}\right)\frac{\vec{k}_1}{k_1}\cdot\frac{f_1^o(u_1)}{\partial\vec{u}_1}\right\} \qquad (4.56)$$

soit, en revenant au système de coordonnées initiales :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m}\cos\omega_o t_1\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{v}_1}\right] f_1(v_1,t_1)$$

$$= \frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\vec{v}_1}\cdot\frac{\vec{k}_1}{k_1^4}\left\{-F'\left(\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{v}_1^*}{k_1}\right) f_1^o(v^*) + F\left(\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{v}_1^*}{k_1}\right)\frac{\vec{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_1^o(v_1^*)}{\partial\vec{v}_1}\right\} \qquad (4.57)$$

où l'on a posé :

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 + \frac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o}\sin\omega_o t_1 \qquad (4.58)$$

Jusqu'à présent nous n'avons tenu compte de la petitesse de $\vec{E}_o$ que pour le choix des paramètres caractéristiques du milieu nécessaires à la normalisation des coordonnées (voir chapitre III - paragraphe III.1) :

$$r_o = \left(\frac{1}{4\,\pi\,n_o}\right)$$

$$v_o = \left(\frac{KT}{m}\right)^{1/2} \quad : \text{vitesse thermique}$$

ce qui nous conduit à prendre $\varepsilon = (1/n_o\,\lambda_D^3)^{2/3}$.

Nous allons maintenant préciser ce que nous entendons par "E_o faible", afin de simplifier l'équation (4.57).

Dans cette équation, le deuxième terme du membre de gauche s'écrit, en coordonnées normalisées (voir équation (4.20)).

$$- \vec{E}'_o \cos t'_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} \qquad (4.59)$$

où $\vec{E}'_o = \dfrac{r_o\, e}{m\, v_o^2}\, E_o\, \vec{\tilde{E}}_o$ d'après (4.13)

avec $\vec{\tilde{E}}_o$: vecteur unitaire dans la direction $\vec{E}_o$.

On a donc :

$$E'_o = \frac{r_o}{v_o} \cdot \frac{\omega_o\, v_E}{v_o} = \left(\frac{1}{4\,\pi\, n_o}\right)^{1/3} \cdot \frac{\omega_o}{v_o} \cdot \frac{v_E}{v_o} = \varepsilon^{1/2}\, \frac{\omega_o}{\omega_p}\, \frac{v_E}{v_o}$$

où $v_E = \dfrac{e\, E_o}{m\, \omega_o}$ est la vitesse maximale d'un électron soumis uniquement à l'onde externe.

Si l'on prend comme critère de "champ faible" $v_E << v_o$ et si l'on suppose que v_E/v_o est suffisamment petit pour que E'_o soit d'ordre ε quel que soit ω_o alors nous sommes conduit à prendre f_1° au lieu de f_1 dans l'expression (4.59).

D'autre part, si l'on suppose que f_1° et F sont des maxwelliennes donc des fonctions du type :

$$g(v) = e^{-\alpha v^2}$$

alors :

$$g(v^*) = \exp\left\{-\alpha \left|\vec{v} + \frac{e\, \vec{E}_o}{m\, \omega_o} \sin \omega_o\, t_1\right|^2\right\}$$

$$= g(v) \exp\left\{-\alpha \left|\frac{e\, E_o}{m\, \omega_o} \sin \omega_o\, t_1\right|^2\right\} \exp\left\{-2\alpha \left|\vec{v}_o \cdot \frac{e\, \vec{E}_o}{m\, \omega_o} \sin \omega_o\, t_1\right|\right\}$$

Si nous développons les deux exponentielles ci-dessus, nous allons obtenir un développement de $g(v^*)$ en fonction de ε et comme nous devons garder uniquement les termes d'ordre zéro en ε, il reste :

$$g(v^*) = g(v)$$

Par conséquent, si nous tenons compte des deux remarques ci-dessus, l'équation (4.57) se simplifie et devient :

$$\frac{\partial f_1(v_1, t_1)}{\partial t_1} - \frac{e\, \vec{E}_o}{m} \cos \omega_o\, t_1 \cdot \frac{\partial f_1^\circ}{\partial \vec{v}_1}$$

$$= \frac{\omega_p^4}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} \left\{ - F'\left(\frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{v}_1}{k_1}\right) f_1^\circ(v_1) + F\left(\frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{v}_1}{k_1}\right) \frac{\vec{k}_1}{k_1} \cdot \frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial \vec{v}_1} \right\} \qquad (4.60)$$

Nous avons donc obtenu pour ce cas A_1 (champ faible, couplage faible) une équation cinétique qui peut se mettre sous les formes (4.57) et (4.60) suivant les valeurs du champ extérieur faible E_o, l'équation la plus générale étant (4.57).

Si l'on fait tendre E_o vers zéro dans l'équation (4.60), nous retrouvons exactement l'équation habituelle de FOKKER-PLANCK [28]. Ce résultat avait déjà été signalé par SO [16] qui avait utilisé la même méthode, mais en l'absence de champ externe.

IV.4.2 - Cas A_2 : Champ extérieur faible ; Forces à longue portée

Nous nous proposons de calculer maintenant les coefficients de friction $\overleftrightarrow{\mathcal{F}}_f$ et de diffusion $\vec{\mathcal{D}}$ donnés par les équations (4.22) et (4.24) afin d'obtenir une équation cinétique pour f_1.

En utilisant le changement de variables (4.43) et les transformations de FOURIER-LAPLACE, les équations (4.22) et (4.24) deviennent :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = \omega_p^2 \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \exp\left[i\vec{k}_1.\vec{y}_1 + p_1\tau_1\right] \int du_2\ \delta g_{1/1}(k_1,u_2,p_1/\eta_{\alpha 1},o) \tag{4.61}$$

et

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathcal{D}}(u_1,\tau_1) = &- \omega_p^4 \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_2}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2).\vec{y}_1} \frac{\vec{k}_1}{k_1^2} \frac{\vec{k}_2}{k_2^2} \\ &. \int \frac{dp_1\ dp_2}{(2i\pi)^2} e^{p_1\tau_1} e^{p_2(\tau_1+\sigma)} e^{i\vec{k}_2.\vec{u}_1\sigma} \int f_1^o(u_4)\ \delta g_{1/1}(k_1,u_3,p_1/k_2,u_4,p_2)\ du_3\ du_4 \\ &- \frac{\omega_p^4}{n_o} \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_2}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2).\vec{y}_1} \frac{\vec{k}_1}{k_1^2} \frac{\vec{k}_2}{k_2^2} \\ &. e^{i\vec{k}_2.(\vec{u}_1-\vec{u}_3)\sigma} .(2\pi)^3\ \delta(k_1+k_2)\ f_1^o(u_3)\ du_3\end{aligned} \tag{4.62}$$

Nous constatons donc que pour calculer $\vec{\mathcal{F}}_f$ et $\overleftrightarrow{\mathcal{D}}$, il nous faut connaître :

$$G(k_1,p_1/y_{\alpha 1},u_{\alpha 1}) = \int du_2\ \delta g_{1/1}(k_1,u_2,p_1/\eta_{\alpha 1},o) \tag{4.63}$$

et :

$$Q(1,2) \equiv Q(k_1,p_1;k_2,p_2) = \int f_1^o(u_4)\ \delta g_{1/1}(k_1,u_3,p_1/k_2,u_4,p_2)\ du_3\ du_4 \tag{4.64}$$

Avant de calculer ces deux quantités, effectuons la remarque suivante :

REMARQUE :

Dans le développement en cumulant de la densité de probabilité D(1,2), où 1 et 2 représentent respectivement (ξ_1,t_1) et (ξ_2,t_2), nous avons :

$$D(1,2) = D(1)\ D(2) + P(1,2)$$

$$= \frac{1}{V^2}\ f_1(1)\ f_1(2) + P(1,2) \qquad (4.65)$$

où P(1,2) est d'ordre 1 en ε .

D'autre part, la densité de probabilité conditionnelle s'écrit par définition :

$$D(1,2) = \frac{D(1,2)}{D(2)}$$

d'où :

$$D(1,2) = \frac{1}{V^2}\ f_1(2)\ g_{1/1}(1/2)$$

$$= \frac{1}{V^2}\ f_1(2)\ \left[f_1(1) + \delta g_{1/1}(1/2)\right] \qquad (4.66)$$

En comparant (4.65) et (4.66), nous constatons que :

$$P(1,2) = \frac{1}{V^2}\ f_1^\circ(2)\ \delta g_{1/1}(1/2)$$

à l'ordre 1 en ε.

Nous pouvons alors noter que :

$$Q(1,2) = V^2 \int du_1\ du_2\ P(k_1,u_1,p_1/k_2,u_2p_2)$$

est relié à la densité spectrale S des fluctuations de densité par la relation bien connue [36],[37] :

$$S(1,2) = n_o^2\ Q(1,2) + n_o \int du\ f_1(u,p_1) \qquad (4.67)$$

Calculons donc maintenant le terme $G(k_1,p_1/y_{\alpha_1},u_{\alpha_1})$ et pour cela utilisons l'équation (4.42). Si l'on effectue le changement de variables (4.43) sur cette équation, il vient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau_2}+\vec{u}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{y}_2}\right]\delta g_{1/1}(\eta_2,\tau_2/\eta_{\alpha_1},o)= \left(\frac{n_o}{m}\right)\frac{\partial}{\partial\vec{u}_2}\cdot\int\frac{\partial\phi(\vec{y}_2-\vec{y}_3)}{\partial\ \vec{y}_2}\ \delta g_{1/1}(\eta_3,\tau_2/\eta_{\alpha_1},o)\ d\eta_3\ f_1^\circ(u_2)$$

$$+\ \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\vec{u}_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{y}_2}\ \phi\left[\vec{y}_2-\vec{y}_1-\vec{u}_1(\tau_2-\tau_1)\right]\ f_1^\circ(u_2) \qquad (4.68)$$

(Dans l'équation ci-dessus, nous avons tenu compte de la remarque (4.50) concernant le dernier terme. Les définitions de η et $\eta_{\alpha 1}$ sont les mêmes que dans le paragraphe IV.4.1).

En transformées de FOURIER-LAPLACE, cette équation devient :

$$(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_2)\ \delta g_{1/1}(k_1,u_2,p_1/\eta_{\alpha 1},o)$$

$$= \omega_p^2 \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \cdot \frac{\partial f_1^\circ(u_2)}{\partial \vec{u}_2} \int du_3\ \delta g_{1/1}(k_1,u_3,p_1/\eta_{\alpha 1},o)$$

$$+ \frac{\omega_p^2}{n_o} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \cdot \frac{\partial f_1^\circ(u_2)}{\partial \vec{u}_2} \frac{\exp\{-i\vec{k}_1.[\vec{y}_1-\vec{u}_1\tau]\}}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}_1} + \delta g_{1/1}(k_1,u_2,o/\eta_{\alpha 1},o)$$

Si nous intégrons sur $\vec{u}_2$, après avoir divisé par $(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_2)$, il vient :

$$G(k_1,p_1/y_{\alpha 1},u_{\alpha 1}) = \frac{\exp\{-i\vec{k}_1.[\vec{y}_1-\vec{u}_1\tau]\}}{n_o\ D(k_1,p_1)} \frac{1-D(k_1,p_1)}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \qquad (4.69)$$

Dans l'équation ci-dessus nous avons admis que les corrélations induites par le champ extérieur étaient prépondérantes et nous avons fait l'hypothèse de disparition des corrélations initiales. Nous avons de plus posé, comme cela se fait habituellement :

$$D(k,p) = 1 + \chi(k,p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int du \frac{i\vec{k}.\frac{\partial f_1^\circ(u)}{\partial \vec{u}}}{p+i\vec{k}.\vec{u}} \qquad (4.70)$$

D représente la constante diélectrique alors que χ est la susceptibilité diélectrique.

Nous sommes donc maintenant en mesure d'écrire l'équation (4.61) sous la forme :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^2}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{D(k_1,p_1)} \frac{1 - D(k_1,p_1)}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1}$$

$$= \frac{\omega_p^2}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \frac{1}{D(k_1,p_1)}$$

$$- \frac{\omega_p^2}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \int \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1}$$

$$= \frac{\omega_p^2}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_1}{2i\pi} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \frac{1}{D(k_1,p_1)} - \frac{\omega_p^2}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}$$

(4.71)

Or le résultat devant être réel, il ne reste finalement plus que :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(u_1,\tau_1) = -\frac{\omega_p^2}{n_o}\,\mathrm{Im}\left\{\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{dp_1}{2i\pi}\,\frac{\vec{k}_1}{k_1^2}\,\frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1}\,\frac{1}{D(k_1,p_1)}\right\} \qquad (4.72)$$

Venons en maintenant au calcul de Q(1,2) et utilisons pour cela l'équation (4.41). En effectuant le changement de variables (4.43) et les transformations de FOURIER-LAPLACE, cette équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\;\delta g_{1/1}(k_1,u_1,p_1/k_2,u_2,p_2) - \delta g_{1/1}(k_1,u_1,t=o/k_2,u_2,p_2)\\ = \omega_p^2\,\frac{\partial f_1^o(u_1)}{\partial \vec{u}_1}\cdot\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\int du_3\;\delta g_{1/1}\;(k_1,u_3,p_1/k_2,u_2,p_2)\\ + \frac{\omega_p^2}{n_o}\,\frac{\partial f_1^o(u_1)}{\partial \vec{u}_1}\cdot\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\,\frac{(2\pi)^3\;\delta(k_1+k_2)}{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_2)\;(p_2+i\vec{k}_2.\vec{u}_2)}\end{aligned} \qquad (4.73)$$

Divisons par $(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)$, multiplions par $f_1^o(u_2)$ et intégrons sur $\vec{u}_1$ puis sur $\vec{u}_2$:

$$Q(1,2) = \frac{1}{D(k_1,p_1)}\int \frac{du_1}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1}\,f_1^o(u_1)\;G(k_2,p_2/k_1,u_1) - \frac{\chi(k_1,p_1)}{D(k_1,p_1)}\,\frac{(2\pi)^3\;\delta(k_1+k_2)}{n_o}\,U(1,2) \qquad (4.74)$$

où nous avons posé :

$$U(1,2) \equiv U(k_1,p_1;k_2,p_2) = \frac{U(1)+U(2)}{p_1+p_2} \qquad (4.75)$$

les fonctions U étant les intégrales habituelles [38]:

$$U(1) \equiv U(k_1,p_1) = \int \frac{du\;\; f_1^o(u)}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{u}} \qquad (4.76)$$

$$= \int \frac{dw\;F(w)}{p_1 + ik_1\,w} \qquad \text{pour } \mathcal{R}e\;p_1 > o$$

$$= \int \frac{dw\;F(w)}{p_1 + ik_1\,w} + \frac{2\pi}{k_1}\,F\left(\frac{ip_1}{k_1}\right) \qquad \text{pour } \mathcal{R}e\;p_1 < o$$

(La fonction F est définie en (4.53)).

Nous pouvons obtenir $G(k_2,p_2/k_1,u_1)$ grâce à l'équation (4.69) :

$$G(k_2,p_2/k_1,u_1) = - \int \frac{e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2).\vec{y}_1}}{n_o\, D(k_2,p_2)} \frac{\chi(k_2,p_2)}{p_2 + i\vec{k}_2.\vec{u}_1}\, dy_1$$

$$= - (2\pi)^3 \frac{\delta(k_1+k_2)}{n_o} \frac{1}{p_2 + i\vec{k}_2 \,.\, \vec{u}_1} \frac{\chi\,(k_2,p_2)}{D(k_2,p_2)} \qquad (4.77)$$

Reportons cette expression de G dans l'équation (4.74), il vient :

$$Q(1,2) = - \frac{1}{D(k_1,p_1)} \int \frac{du_1}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1} \frac{(2\pi)^3\, \delta(k_1+k_2)}{n_o} \frac{f_1^\circ(u_1)}{p_2+i\vec{k}_2.\vec{u}_1} \frac{\chi(k_2,p_2)}{D(k_2,p_2)}$$

$$- \frac{\chi(k_1,p_1)}{D(k_1,p_1)} \frac{(2\pi)^3\, \delta(k_1+k_2)}{n_o}\, U(1,2)$$

$$= + (2\pi)^3 \frac{\delta(k_1+k_2)}{n_o} \frac{1 - D(k_1,p_1)\, D(k_2,p_2)}{D(k_1,p_1)\, D(k_2,p_2)}\, U(1,2) \qquad (4.78)$$

Nous sommes donc maintenant en mesure de calculer le terme de diffusion $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$. Pour cela portons l'équation (4.78) dans l'équation (4.62), nous obtenons :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^4}{n_o} \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{.\vec{k}_1\, \vec{k}_1.}{k_1^4} \int \frac{dp_1\, dp_2}{(2i\pi)^2}\, e^{p_1\, \tau_1}\, e^{p_2(\tau_1+\sigma)}\, e^{-i\vec{k}_1.\vec{u}_1\sigma}$$

$$\cdot \frac{1-D(k_1,p_1)\, D(-k_1,p_2)}{D(k_1,p_1)\, D(-k_1,p_2)}\, U(1,2)$$

$$+ \frac{\omega_p^4}{n_o} \int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{.\vec{k}_1\, \vec{k}_1.}{k_1^4}\, e^{-i\vec{k}_1.(\vec{u}_1-\vec{u})\sigma}\, f_1^\circ(u)\, du$$

En regroupant différemment les termes du second membre de l'équation ci-dessus, on peut écrire :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^4}{n_o}\int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}\;e^{(p_2-i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\sigma}}{D(k_1,p_1)\;D(-k_1,p_2)}\;.\;U(1,2)$$

$$+\frac{\omega_p^4}{n_o}\int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\;e^{-i\vec{k}_1.\vec{u}_1\sigma}\int f^{\circ}(u)\;du$$

$$\cdot\left[e^{i\vec{k}_1.\vec{u}\sigma} - \int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}\;e^{p_2\sigma}}{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u})\;(p_2-i\vec{k}_1.\vec{u})}\right]$$

Mais nous pouvons constater que :

$$\left[e^{i\vec{k}_1.\vec{u}\sigma} - \int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}\;e^{p_2\sigma}}{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u})\;(p_2-i\vec{k}_1.\vec{u})}\right] = \left[e^{i\vec{k}_1.\vec{u}\sigma} - e^{-i\vec{k}_1.\vec{u}\,\tau_1}\;e^{i\vec{k}_1.\vec{u}(\tau_1+\sigma)}\right] = 0$$

Le terme de diffusion s'écrit donc finalement sous la forme :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^4}{n_o}\int_{-\infty}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}}{D(k_1,p_1)}$$

$$\cdot\,\frac{e^{(p_2-i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\sigma}}{D(-k_1,p_2)}\;U(1,2)$$

Soit :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}}{p_1 - i\vec{k}_1.\vec{u}_1}\cdot\frac{1}{D(k_1,p_1)\;D(-k_1,p_2)}\;U(1,2) \tag{4.79}$$

Afin de trouver l'équation d'évolution de f_1, nous allons remplacer dans l'équation (4.21) les expressions de $\vec{\mathfrak{F}}_f$ et de $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ que nous avons trouvé ci-dessus. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\,f_1(u_1,\tau_1) = \frac{\omega_p^2}{n_o}\,\frac{\partial}{\partial\vec{u}_1}\cdot\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{dp_1}{2i\pi}\,\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\,\frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{u}_1)\tau_1}}{p_1 + i\vec{k}_1\,.\,\vec{u}_1}\,\frac{f_1^{\circ}(u_1)}{D(k_1,p_1)}$$

$$+\frac{\omega_p^4}{n_o}\,\frac{\partial}{\partial\vec{u}_1}\cdot\int \frac{dk_1}{(2\pi)}\,\frac{\vec{k}_1\,\vec{k}_1}{k_1^4}\cdot\frac{\partial f_1^{\circ}(u_1)}{\partial\vec{u}_1}\int \frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)\tau_1}}{p_2-i\vec{k}_1.\vec{u}_1}\cdot\frac{u(1,2)}{D(k_1,p_1)\;D(-k_1,p_2)} \tag{4.80}$$

Dans le système $(\vec{x}, \vec{v}, t)$, on obtient finalement :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m}\cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\right] f_1(v_1,t_1)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{n_o}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \mathrm{Im}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{dp_1}{2i\pi}\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{v}_1^{\,*})t_1}}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{v}_1^{\,*}}\frac{f_1^o(v_1^*)}{D(k_1,p_1)}$$

$$+ \frac{\omega_p^4}{n_o}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\cdot\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{\vec{k}_1\,\vec{k}_1}{k_1^4}\cdot\frac{\partial f_1^o(v_1^*)}{\partial \vec{v}_1}\int\frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\frac{e^{(p_1+p_2)t_1}}{p_2 - i\vec{k}_1.\vec{v}_1^{\,*}}$$

$$\cdot \frac{U(1,2)}{D(k_1,p_1)\,D(-k_1,p_2)} \qquad (4.81)$$

où v_1^* est défini comme en (4.58).

Comme dans le paragraphe IV.4.2, le deuxième terme du membre de gauche de l'équation ci-dessus s'écrit, en coordonnées normalisées (voir équation (4.20)) :

$$-\vec{E}_o' \cos t_1' \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1}$$

où $\quad \vec{E}_o' = \dfrac{r_o\,e}{m\,v_o^2}\,E_o\,\tilde{\vec{E}}_o$

Pour le cas A_2 que nous étudions actuellement, nous avons :

$$\begin{cases} r_o = \lambda_D \\ v_o = (KT/m)^{1/2} \end{cases}$$

et : $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{n_o\,\lambda_D^3}$

Dans ces conditions :

$$E_o' = \frac{\lambda_D}{v_o}\cdot\frac{\omega_o\,v_E}{v_o} = \frac{\omega_o}{\omega_p}\cdot\frac{v_E}{v_o}$$

Si v_E/v_o est suffisamment petit pour que E_o' soit d'ordre ε quel que soit ω_o, alors nous pouvons appliquer les mêmes remarques que dans le paragraphe IV.4.2, et il vient :

$$\frac{\partial f_1(v_1,t_1)}{\partial t_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m}\cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial f_1^\circ}{\partial \vec{v}_1}$$

$$= \frac{\omega_p^2}{n_o}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \mathrm{Im}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{dp_1}{2i\pi}\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\,\frac{e^{(p_1+i\vec{k}_1.\vec{v}_1)t_1}}{p_1 + i\vec{k}_1.\vec{v}_1}\,\frac{f_1^\circ(v_1)}{D(k_1,p_1)}$$

$$+ \frac{\omega_p^4}{n_o}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1}\cdot\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{\vec{k}_1\,\vec{k}_1}{k_1^4}\cdot\frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial \vec{v}_1}\int\frac{dp_1\,dp_2}{(2i\pi)^2}\,\frac{e^{(p_1+p_2)t_1}}{p_2-i\vec{k}_1.\vec{v}_1}\cdot\frac{U(1,2)}{D(k_1,p_1)\,D(-k_1,p_2)}$$

(4.82)

Utilisons maintenant les hypothèses qui sont faites habituellement dans le cas d'un champ extérieur faible, à savoir que toutes les singularités de $1/D(k_1,p_1)$ sont amorties exponentiellement quand $t \to \infty$ et que la seule contribution qui reste provient des autres pôles. Le terme de friction s'écrit alors dans la limite asymptotique :

$$\mathcal{F}_f(v_1) = -\frac{\omega_p^2}{n_o}\int\frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{\vec{k}_1}{k_1^2}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1)} \qquad (4.83)$$

Or :

$$D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1) = \lim_{\delta\to o}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{k_1^2}\int dv\,\frac{ik_1\cdot\dfrac{\partial f_1^\circ(v)}{\partial \vec{v}}}{i\vec{k}.(\vec{v}-\vec{v}_1)+\delta}\right]$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to o\\ \delta>o}}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{k_1^2}\int\frac{F'(w)\,dw}{w - w_1 - \dfrac{i\delta}{k_1}}\right]$$

où F est défini en (4.53). Utilisons maintenant la formule de PLEMLJ ; il vient :

$$D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_1^2}\left[\int dw\,F'(w)\,\frac{\mathcal{P}}{w-w_1} + i\pi\,F'(w_1)\right]$$

d'où $\quad \mathrm{Im}\,D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1) = -\dfrac{\pi\,\omega_p^2}{k_1^2}\,F'(w_1)$

Nous avons alors :

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1)} = \mathrm{Im}\,\frac{D^*}{DD^*} = -\frac{\mathrm{Im}\,D}{|D|^2} = \frac{\pi\,\omega_p^2\,F'(w_1)}{k_1^2\,|D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1)|^2} \qquad (4.84)$$

L'équation (4.83) devient donc :

$$\vec{\mathcal{F}}_f(v_1) = -\frac{\pi\,\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{\vec{k}_1}{k_1^4}\,\frac{F'(w_1)}{|D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1)|^2} \qquad (4.85)$$

De la même manière, la limite asymptotique de $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ s'écrit :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1) = -\frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{dp_1}{2i\pi}\,\frac{1}{p_1+i\vec{k}_1.\vec{v}_1}\cdot\frac{U(k_1,p_1)+U(-k_1,-p_1)}{D(k_1,p_1)\;D(-k_1,-p_1)} \qquad (4.86)$$

Dans la mesure où la fonction est analytique dans tout le plan, nous pouvons repousser le contour d'intégration $(\sigma-i\infty\ ,\ \sigma+i\infty)$ en faisant tendre $\sigma \to o_+$. On peut poser $p = i\omega+\varepsilon$ et (4.86) devient :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1) = -i\,\frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{1}{\omega+\vec{k}_1.\vec{v}_1-i\varepsilon}\cdot\frac{U(k_1,i\omega)+U(-k_1,-i\omega)}{D(k_1,i\omega)\;D(-k_1,-i\omega)}$$

En utilisant les formules de PLEMELJ et le fait que :

$$U(k_1,i\omega)+U(-k_1,-i\omega) = \frac{2\pi}{k_1}\,F\left(-\frac{\omega}{k}\right)$$

on obtient :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1)\ -i\,\frac{\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left[\frac{\mathcal{P}}{\omega+\vec{k}_1.\vec{v}_1}+i\pi\delta(\omega+\vec{k}_1.\vec{v}_1)\right]\cdot\frac{2\pi}{k_1}\,\frac{F\left(-\frac{\omega}{k_1}\right)}{|D(k_1,i\omega)|^2}$$

Puisque $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ doit être réel, la seule contribution provient de la fonction de DIRAC :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}(v_1) = \frac{\pi\,\omega_p^4}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{.\vec{k}_1\,\vec{k}_1.}{k_1^5}\,\frac{F(w)}{|D(k_1,-ik_1w)|^2} \qquad (4.87)$$

L'équation d'évolution de f_1 s'écrit donc :

$$\frac{\partial f_1(v_1,t_1)}{\partial t_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m}\cos\omega_o t_1\cdot\frac{\partial f_1^\circ}{\partial\vec{v}_1}$$

$$= -\frac{\pi\,\omega_p^4}{n_o}\,\frac{\partial}{\partial\vec{v}_1}\cdot\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\,\frac{\vec{k}_1}{k_1^4}\,\frac{\left[f_1^\circ(v_1)\;F'(w_1)-F(w_1)\;\frac{\vec{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial\vec{v}_1}\right]}{|D(k_1,-i\vec{k}_1.\vec{v}_1)|^2} \qquad (4.88)$$

En remarquant que :

$$\frac{\vec{k}_1}{k_1} \cdot \frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial \vec{v}_1} = \frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial w_1}$$

on peut écrire l'équation (4.88) sous la forme :

$$\frac{\partial f_1(v_1,t_1)}{\partial t_1} - \frac{e\,\vec{E}_o}{m} \cos \omega_o t_1 \cdot \frac{\partial f_1^\circ}{\partial \vec{v}_1} = - \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdot \vec{J}(v_1) \qquad (4.89)$$

où la fonction $\vec{J}(v_1)$ est définie par :

$$\vec{J}(v_1) = \frac{\pi\,\omega_p^4}{n_o} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}_1}{k_1^4} \frac{\left[f_1^\circ(v_1)\, F'(w_1) - F(w_1) \frac{\partial f_1^\circ(v_1)}{\partial w_1} \right]}{|D(k_1, -i\vec{k}_1 . \vec{v}_1)|^2} \qquad (4.90)$$

Si l'on fait $E_o = 0$ dans l'équation (4.89), on reconnaît l'équation de BALESCU-LENARD.

Nous avons donc obtenu, pour ce cas A_2 (champ extérieur faible ; forces à longue portée) une équation cinétique qui peut se mettre sous les formes (4.81) et (4.89) suivant les valeurs du champ extérieur faible E_o. L'équation (4.81) correspond à un champ suffisamment faible pour que les paramètres caractéristiques du milieu soient les mêmes qu'en l'absence de champ ($r_o = \lambda_D$ et $v_o = v_T$) mais sans précision supplémentaire sur E_o. L'équation (4.89) répond aux mêmes conditions que ci-dessus, mais avec une hypothèse plus forte sur E_o puisque l'on demande que $E_o \sim \varepsilon$.

IV.4.3 - Cas B - champ extérieur intense

Nous nous apercevons que dans ce cas B, l'équation d'évolution de f_1 est donné par l'équation (4.21) à laquelle on doit adjoindre les équations (4.22) pour $\vec{\mathcal{F}}_f$ et (4.24) pour $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$. Le calcul de $\vec{\mathcal{F}}_f$ et $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}$ nécessite la résolution des équations (4.41) et (4.42) sur $\delta g_{1/1}(\xi_1,t_1/\xi_2,t_2)$ et $\delta g_{1/1}(\xi_2,t_2/\alpha_1,o)$. Toutes ces équations sont les mêmes que pour le cas A_2 et l'équation cinétique que nous cherchons est donc l'équation (4.81).

Par conséquent, dans le domaine des plasmas, l'équation (4.81) est valable quelle que soit l'intensité du champ extérieur. Mais il faut bien souligner que l'obtention de cette équation cinétique n'a pas été faite de la même manière, car il a été nécessaire d'utiliser deux paramètres de développements différents suivant les valeurs du champ E_o. Pour un champ faible, nous avons utilisé la paramètre habituel $1/n_o \lambda_D^3$ alors que pour les champs intenses, nous avons introduit un paramètre qui tient compte à la fois des propriétés collectives du plasma grâce à $1/n_o \lambda_D^3$ et de l'importance du champ extérieur par KT/W_E.

Chapitre V

CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons traité le problème de l'interaction d'un plasma d'électrons avec une onde électromagnétique extérieure. Trois cas ont été abordés et nous ont conduits à trois équations cinétiques : deux cas en champ faible dont nous rappelons les caractéristiques :

- Cas A_1 : gaz modérément dense - forces à moyenne portée - couplage faible ;
- Cas A_2 : plasma - forces à longue portée - couplage faible,

et un cas en champ fort (Cas B).

La méthode que nous avons utilisée est celle de STRATONOVICH-SO-OGUNLANA. Cette théorie stochastique à l'avantage de permettre de dissocier le champ extérieur déterministe du champ stochastique interne, ce qui est très intéressant, notamment quand le champ externe est intense.

Grâce à cette méthode nous avons pu obtenir une hiérarchie d'équations d'évolution pour les fonctions de distribution simples et conditionnelles. Cette hiérarchie a ensuite pu être brisée en développant les densités de probabilité en fonction d'un petit paramètre sans dimension, adapté à chacun des trois cas. Pour les cas A_1 et A_2, ce paramètre est respectivement égal à $\varepsilon_1^{2/3}$ et ε_1 (où $\varepsilon_1 = 1/n_o \lambda_D^3$). Ce sont les paramètres habituels lorsque le champ extérieur est faible. Quant au cas B (champ fort), nous avons trouvé un paramètre nouveau qui tient compte à la fois des propriétés collectives du plasma, de l'importance du champ externe et de sa fréquence. Ce paramètre est :

$$\varepsilon = \gamma\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2$$

où : $\gamma = \omega_o/\omega_p$; $\varepsilon_1 = 1/n_o\lambda_D^3$; $\varepsilon_2 = (KT/2W_E)^{3/2}$

Une fois la hiérarchie brisée, nous avons obtenu un système de deux équations couplées entre la fonction de distribution à une particule et la fonction de distribution à une particule conditionnée par une autre. La première de ces deux équations a la forme d'une équation de FOKKER-PLANCK généralisée. Alors que dans les équations de FOKKER-PLANCK normales on doit introduire l'écrantage par des considérations physiques [23], dans notre modèle celui-ci est directement pris en compte grâce à la présence de moyennes conditionnelles ; en effet, l'image statistique du nuage écran est traduite par les densités de probabilité conditionnelle.

Après cela, en utilisant un changement de variables approprié et les transformations de FOURIER-LAPLACE, nous avons pu éliminer une des deux équations et calculer ainsi le terme de friction par polarisation, les densités spectrales des fluctuations de densité et le terme de diffusion. Nous avons alors obtenu les équations cinétiques cherchées.

Dans le cas A_1, nous obtenons l'équation de FOKKER-PLANCK habituelle, légèrement modifiée par le champ extérieur faible. De même, dans le cas A_2, nous trouvons une équation de BALESCU-LENARD modifiée par la présence du champ faible. Enfin pour le cas B, nous obtenons l'équation cinétique pour un plasma en interaction avec un champ fort. Cependant, comme nous l'avons remarqué au cours de cette étude, cette équation est aussi valable, dans le domaine des plasmas, pour le cas d'un champ faible et ne donne l'équation de BALESCU-LENARD que si l'on fait des hypothèses très fortes sur la petitesse du champ externe. Mais nous devons noter que si l'équation est la même quelle que soit l'intensité du champ, elle n'est pas obtenue avec le même paramètre de développement pour le champ faible que pour le champ fort.

La motivation et le but de notre étude étant de trouver une théorie permettant de décrire l'interaction d'un plasma avec un champ électromagnétique intense, nous avons présenté dans ce mémoire la méthode qui nous a paru la mieux adaptée à ce problème. Nous avons pu mesurer, dans un cas simple (plasma d'électrons), l'intérêt qu'elle pouvait présenter lorsque les phénomènes d'interaction sont fortement non-linéaires. Maintenant que nous sommes en possession d'une méthode pour traiter ces problèmes, il est possible de se rapprocher un peu plus de la réalité physique en étudiant l'interaction d'un champ fort avec un plasma électron-ion.

En effet, ici nous avons supposé que les ions formaient un fond positif uniforme, mais en réalité il est essentiel de considérer les ions comme un système de particules discrètes, de manière à pouvoir, en particulier, montrer les phénomènes de transfert d'énergie dans un champ électromagnétique intense. En effet, nous pouvons montrer [39] (voir annexe II) que même dans la limite où la masse des ions est infinie, bien qu'ils ne modifient pas la friction par polarisation, ceux-ci apportent une contribution au terme de diffusion.

ANNEXE I

Stochastic Kinetic Theory of Strong Wave-Plasma Interaction.

G. Di Bona and C. Masselot
Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes de Limeil - Villeneuve-Saint-Georges

(ricevuto il 19 Maggio 1971)

We consider the interaction of an electron plasma with a strong electromagnetic wave in which the electrons acquire an energy greater than or equal to their thermal energy. We assume also the frequency ω to be greater than or equal to the plasma frequency ω_p.

Many authors have been interested in this problem and they used the framework of classical theory[1-3].

We approach this problem by means of a different method using stochastic processes. We assume the mean trajectories of electrons to be driven by the wave electrical field. The interactions between particles give rise to fluctuations about their mean trajectories.

Under these conditions, the equation for the electron motion is

$$\dot{\xi} = F^{o}(\xi,t) + \varepsilon F(\xi,t) \tag{1}$$

with $\xi = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ v \end{pmatrix}$ (position and velocity of the electron),

$$F^{o}(\xi,t) = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ -\frac{e}{m}\vec{E}_{o}\cos\omega t \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \varepsilon F(\xi,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{e}{m}\vec{E}(x,t) \end{pmatrix}$$

where $(e/m)\vec{E}_{o}\cos\omega t$ is the large deterministic force connected with the external electrical field and $(e/m)\vec{E}(x,t)$ is the small stochastic force due to the interactions between particles.

---

(1) V.P. SILIN : *Zurn. Eksp. Teor. Fiz.*, 20, 1510 (1965).

(2) P.K. KAW and A. SALAT : *Phys. Fluids*, 11, 223 (1968) ; A. SALAT and P.K. KAW : *Phys. Fluids*, 12, 342 (1969).

(3) J.P. BABUEL-PEYRISSAC : submitted to *Phys. Fluids*.

The evolution equation for one-particle distribution function is derived from system (1) by means of the Stratonovich method[4] generalized by KAM-CHUEN SO[5] and OGUNLANA[6]. In the spatially homogeneous case, we obtained the following equation :

$$(2)\qquad \frac{\partial f(v,t)}{\partial t} - \frac{e\vec{E}_o}{m\omega}\cos\omega t.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left[<\vec{E}(x,t)\,|\,\xi(0) = \lambda> f \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} D.\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f$$

where $<\vec{E}(x,t)\,|\,\xi(0) = \lambda>$ is average of E given $\xi(0) = \lambda$, with

$$(3)\qquad \lambda = \begin{pmatrix} \vec{x}-\vec{v}t-\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_o\cos\omega t \\ \vec{v}+\frac{e}{m\omega}\vec{E}_o\sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$(4)\qquad D(\vec{v},t,t_o) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{t_o-t}^{o} K(\vec{E},\vec{E}_\sigma)\, d\sigma,$$

$$(5)\qquad \vec{E}_\sigma = \vec{E}\left[\vec{x}+\vec{v}\sigma+\frac{\vec{E}_o e}{m\omega}\left(\frac{\cos\omega(t+\sigma) - \cos\omega t}{\omega} + \sigma\sin\omega t \right), t+\sigma \right]$$

$K(\vec{E},\vec{E}_\sigma)$ is the electrical-field correlation function.

In a first attempt to the computation of an approximate diffusion coefficient, we made the following drastic assumptions : the microscopic charge density is given by the Klimontovich particle densities[7], the plasma is initially in thermodynamical equilibrium and the above statistical averages are taken over co-ordinates and momenta at the initial time.

In these conditions, the diffusion coefficient is found to be

$$(6)\qquad D = \omega_p^2 \frac{e^2}{m} \frac{\Phi\left[(m/2KT)^{1/2}\left|\vec{v} + (e\vec{E}_o/m)(\sin\omega t - \sin\omega t_o)\right|\right]}{\left|\vec{v} + (e\vec{E}_o/m)(\sin\omega t - \sin\omega t_o)\right|} \int_{t_o-t}^{o} \frac{d\sigma}{|\sigma|}$$

At this point, the limits of the integral must be discussed. On the one

---

(4) R.L. STRATONOVICH : *Topics in the Theory of Random Noise* (New York, 1963).

(5) KAM-CHUEN SO : *Generalized stochastic equations and their applications to plasmas*, Ph. D. University of Illinois, unpublished.

(6) J. OGUNLANA : *Nuovo Cimento*, 69 B, 20 (1970).

(7) YU. L. KLIMONTOVICH : *Statistical Theory of Nonequilibrium Processes in a Plasma* (Oxford, 1967).

hand, the electrical-field correlation function $K[\vec{E},\vec{E}_o]$ is zero for any time interval greater than or equal t_o the correlation time τ_c. On the other hand, this calculation is valid only between two strong collisions. Thus, the limits of the integral in (6) correspond to the Debye screening length λ_D and the distance of closest approach b_m. In this case, we obtained

$$\int_{t_o-t}^{o} \frac{d\sigma}{|\sigma|} = \log \Lambda \quad \text{with} \quad \Lambda = \frac{\lambda_D}{b_m}$$

We note that this diffusion coefficient is similar to the one given by CHANDRASEKHAR[8] except for a modification of the velocity argument due to the presence of the strong electromagnetic wave.

PINES and BOHM[9] pointed out that the sphere of influence of a test particle is reduced when its speed increases. Since the electrons under the action of the sinusoidal external field reach periodically a speed close to their thermal velocity, their zones of influence shrink and the correlation time τ_c is $1/\omega$ rather than $1/\omega_p$.

Usually the self-field of a test particle is disregarded in the diffusion coefficient calculation[10], which is not so if the correlation time is shortened. We plan to undertake a more complete calculation of the diffusion and friction coefficients, considering the plasma as a dielectric which will lead to collective effects.

The authors would like to thank P. GUILLANEUX for numerous helpful discussions and for a critical reading of the manuscript. Discussions with D. COLOMBANT are also acknowledged.

---

(8) S. CHANDRASEKHAR : *Principles of Stellar Dynamics* (Chicago, 1942); *Astrophys. Journ.*, 97, 255 (1943) ; L. SPITZER : *Physics of Fully Ionized Gases* (New York, 1956).

(9) D. PINES and D. BOHM : *Phys. Rev.*, 85, 338 (1952).

(10) J. HUBBARD : *Proc. Roy. Soc.*, A 260, 114 (1961).

ANNEXE II

PLASMA ELECTRONS - IONS (*)

Nous considérons un plasma de volume V constitué par N électrons et N ions notés respectivement par e et i.

Si nous supposons que la trajectoire moyenne des particules est gouvernée par le champ électrique extérieur et que les interactions entre les particules donnent lieu à des fluctuations autour de cette trajectoire, les équations du mouvement pour une particule s'écrivent :

$$\dot{\xi}_j^\alpha = F_o^\alpha(\xi_j^\alpha, t) + \varepsilon F^\alpha(\xi_j^\alpha, t) \qquad \text{(A.II.1)}$$

où : $$\xi_j^\alpha = \begin{pmatrix} \vec{x}_j^\alpha \\ \vec{v}_j^\alpha \end{pmatrix}$$

représente la position et la vitesse de la $j^{ème}$ particule du type α dont la charge et la masse sont respectivement q_α et m_α ; le terme :

$$F_o^\alpha = \begin{pmatrix} \vec{v}_j^\alpha \\ \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{E}_o \cos\omega_o t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_j^\alpha \\ -\vec{\Gamma}_o^\alpha \cos\omega_o t \end{pmatrix} \qquad \text{(A.II.2)}$$

correspond au mouvement non-perturbé (E_o est l'amplitude du champ externe sinusoïdal, ω_o sa fréquence et $\vec{\Gamma}_o^\alpha = -\vec{E}_o\, q_\alpha/m_\alpha$) ;

et : $$\varepsilon F^\alpha = \begin{pmatrix} o \\ -\vec{\Gamma}_j^\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(A.II.3)}$$

correspond aux fluctuations dues aux forces coulombiennes entre la $j^{ème}$ particule de l'espèce α et les (2N-1) autres.

(*) G. Di BONA et C. MASSELOT
"Stochastic kinetic theory for electron-ion plasma in strong electromagnetic field".
International Congress Waves and Instabilities in Plasmas, INNSBRUCK, Avril 1973.

Ces forces de Coulomb s'écrivent :

$$- \vec{\Gamma}_j^{\alpha} = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_\alpha} \left[\sum_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^{N} \frac{q_\alpha}{|\vec{x}_j^{\alpha} - \vec{x}_k^{\alpha}|} + \sum_{k=1}^{N} \frac{q_\beta}{|\vec{x}_j^{\alpha} - \vec{x}_k^{\beta}|} \right] \qquad \text{(A.II.4)}$$

Si nous normalisons la position, la vitesse et le temps respectivement par x_E, v_E et $1/\omega_o$ comme dans le cas B des chapitres précédents, nous obtenons le même petit paramètre $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma$. Nous allons donc pouvoir appliquer la même méthode que dans le chapitre III.

Par un processus semblable à celui suivi pour un plasma d'électron, nous obtenons une hiérarchie d'équations gouvernant les fonctions de distribution électronique et ionique, ainsi que les fonctions de distribution conditionnelles. Cette chaîne d'équations est alors brisée en utilisant des développements des fonctions de distribution en fonction du petit paramètre sans dimension ε bien adapté au problème.

Nous obtenons au premier ordre en ε un système d'équations gouvernant la fonction de distribution f_1^e et les fonctions de distribution conditionnelles $\delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{q_e}{m_e} \vec{E}_o \cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{e}} \right] f_1^e \, (\xi_1^e, t_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{e}} \cdot \vec{\mathcal{F}}_f(v_1^e, t_1) \; f_1^{oe} \, (v_1^e, t_1) + \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{e}} \cdot \left| \overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{ee} + \overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{ei} \right| \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{e}} \, f_1^{oe} \, (v_1^e, t_1)$$

(A.II.5)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_1^{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1^{\alpha}} + \frac{q}{m_\alpha} \vec{E}_o \cos\omega_o t_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{\alpha}} \right] \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(\xi_1^\alpha, t_1 / \xi_2^\Lambda, t_2)$$

$$= \frac{{\omega_p^\alpha}^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{\alpha}} \cdot \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1^{\alpha} - \vec{x}_3^{\alpha})}{\partial \vec{x}_1^{\alpha}} \, \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda} \, (\xi_3^\alpha, t_1 / \xi_2^\Lambda, t_2) \, d\xi_3^\alpha \, f_1^{o\alpha}(\xi_1, t_1)$$

$$- \frac{{\omega_p^\alpha}^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{\alpha}} \cdot \int \frac{\partial \phi(\vec{x}_1^{\alpha} - \vec{x}_3^{\beta})}{\partial \vec{x}_1^{\alpha}} \, \delta g_{1/1}^{\beta\Lambda} \, (\xi_3^\beta, t_1 / \xi_2^\Lambda, t_2) \, d\xi_3^\beta \, f_1^{o\alpha} \, (\xi_1^\alpha, t_1)$$

$$- (-1)^{\delta_{\alpha\Lambda}} \frac{{\omega_p^\alpha}^2}{4\pi n_o} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1^{\alpha}} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1^{\alpha}} \, \phi\left[\vec{x}_1^{\alpha} - \vec{x}_2^{\Lambda} - (t_1 - t_2) \vec{v}_2^{\Lambda} - \vec{\Gamma}_o^{\Lambda} \, (t_1, t_2, t_2) \right] \right\} f_1^{o\alpha} \, (\xi_1^\alpha, t_1)$$

(A.II.6)

où β est toujours différent de $\alpha(\beta \neq \alpha)$ et $\delta_{\alpha\Lambda}$ est le symbole de KRONECKER.

Nous avons posé ci-dessus :

$$\vec{\Gamma}_o^{\alpha}(t_1,t_2,t_3) = \left[\frac{\cos\omega_o t_1 - \cos\omega_o t_2}{\omega_o^2} + \frac{t_1-t_2}{\omega_o} \sin\omega_o t_3 \right] \cdot \vec{\Gamma}_o^{\alpha} \qquad \text{(A.II.7)}$$

et :

$$\phi(\vec{x}_j^{\alpha} - \vec{x}_k^{\beta}) = \frac{1}{|\vec{x}_j^{\alpha} - \vec{x}_k^{\beta}|} \qquad \text{(A.II.8)}$$

Remarquons que l'expression qui gouverne $\delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}$ nécessite la connaissance de $\delta g_{1/1}^{\beta\Lambda}$ avec $\beta \neq \alpha$. Par conséquent ces expressions sont couplées ($g_{1/1}^{ee}$ avec $g_{1/1}^{ie}$ et $g_{1/1}^{ei}$ avec $g_{1/1}^{ii}$), ce qui signifie que le modèle plasma électron-ion tient compte du couplage entre les électrons et les ions.

Dans l'équation (A.II.5) les termes de friction et de diffusion sont donnés par :

$$\vec{\mathcal{F}}_f^e = \frac{\omega_p^{e2}}{4\pi} \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ee}(\xi_2^e, t_1/a_{10}^e, o) \, d\xi_2^e$$

$$- \frac{\omega_p^{e2}}{4\pi} \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ie}(\xi_2^i, t_1/a_{10}^e, o) \, d\xi_2^i \qquad \text{(A.II.9)}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{ee} = \frac{1}{n_o} \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^e + \sigma(\vec{v}_1^e - \vec{v}_2^e)\right]}{\partial\vec{x}_1^e} \, f_1^{oe}(\vec{v}_2, t_1) \, d\xi_2^e$$

$$+ \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi_o(\vec{x}_1^e, \vec{x}_2^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi_\sigma(\vec{x}_1^e, \vec{x}_3^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ee}(\xi_3^e, t_1+\sigma/\xi_2^e, t_1) . f_1^{oe}(v_2^e, t_1) d\xi_2^e \, d\xi_3^e \qquad \text{(A.II.10)}$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{ei} = \frac{1}{n_o} \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi(\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi\left[\vec{x}_1^e - \vec{x}_2^i + \sigma(\vec{v}_1^e - \vec{v}_2^i) - \vec{\Gamma}_o^{ie}(t_1+\sigma, t_1, t_1)\right]}{\partial\vec{x}_1^e} f_1^{oi}(v_2^i, t_1) d\xi_2^i$$

$$+ \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi_o(\vec{x}_1^e, \vec{x}_2^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi_\sigma(\vec{x}_1^e, \vec{x}_3^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ii}(\xi_3^i, t_1+\sigma/\xi_2^i, t_1) f_1^{oi}(v_2^i, t_1) d\xi_2^i \, d\xi_3^i$$

$$- \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi_o(\vec{x}_1^e, \vec{x}_2^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi_\sigma(\vec{x}_1^e, \vec{x}_3^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ie}(\xi_3^i, t_1+\sigma/\xi_2^e, t_1) \, f_1^{oe}(v_2^e, t_1) d\xi_2^e \, d\xi_3^i$$

$$- \frac{\omega_p^{e4}}{(4\pi)^2} \int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{\partial\phi_o(\vec{x}_1^e, \vec{x}_2^i)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \frac{\partial\phi_\sigma(\vec{x}_1^e, \vec{x}_3^e)}{\partial\vec{x}_1^e} \, \delta g_{1/1}^{ei}(\xi_3^e, t_1+\sigma/\xi_2^i, t_1) f_1^{oi}(v_2^i, t_1) \, d\xi_2^i \, d\xi_3^e \qquad \text{(A.II.11)}$$

où :

$$\vec{\Gamma}_o^{\alpha\Lambda}(t_1,t_2,t_3) = \vec{\Gamma}_o^{\alpha}(t_1,t_2,t_3) - \vec{\Gamma}_o^{\alpha}(t_1,t_2,t_3) \qquad \text{(A.II.12)}$$

(voir équation A.II.7)

$$\phi_o(\vec{x}_1^{\alpha}, \vec{x}_j^{\Lambda}) = \phi(\vec{x}_1^{\alpha} - \vec{x}_j^{\Lambda}) \qquad \text{(A.II.13)}$$

$$\phi_\sigma(\vec{x}_1^{\alpha}, \vec{x}_j^{\Lambda}) = \phi\left[\vec{x}_1^{\alpha} + \vec{v}_1^{\alpha}\,\sigma + \vec{\Gamma}_o^{\alpha}(t_1+\sigma,t_1,t_1) - \vec{x}_j^{\Lambda}\right] \qquad \text{(A.II.14)}$$

A.II.1 - Terme de friction par polarisation

De manière à trouver le terme de friction et dans les paragraphes suivant les termes de diffusion, il est nécessaire de résoudre (A.II.6) pour les probabilités conditionnelles $\delta g_{1/1}$. Il semble évident qu'un changement de variables qui nous placerait dans un repère oscillant simplifierait considérablement les calculs. Effectuons la transformation suivante :

$$\begin{cases} \vec{y} = \vec{x} - \dfrac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o^2}\cos\omega_o t \\ \vec{u} = \vec{v} + \dfrac{e\,\vec{E}_o}{m\,\omega_o}\sin\omega_o t \\ \tau = t \end{cases} \qquad \text{(A.II.15)}$$

Par cette transformation, les particules suivent des trajectoires comparables à celles qu'elles auraient en l'absence de champ externe.

Si nous effectuons cette transformation ainsi que des transformations de FOURIER-LAPLACE sur l'équation (A.II.9), nous obtenons :

$$\vec{\mathcal{F}}_f^e(u_1^e,t_1) = \omega_p^{e2}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{i\vec{k}_1}{k_1^2}\exp\{i\vec{k}_1.\vec{y}_1^e + i(\omega_1+p\omega_o)\,t_1\}$$

$$\cdot\left[G_{p*}^{ee}(k_1,\omega_1/y_{10}^e,u_{10}^e) - \sum_n I_{n-p}^{ie}(1)\,G_{n*}^{ie}(k_1,\omega_1/y_{10}^e,u_{10}^e)\right] \qquad \text{(A.II.16)}$$

où nous avons utilisé les notations suivantes :

- $\Omega_1 = \omega_1 + p\omega_o$

- $G_{p*}^{\alpha\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^{\Lambda}) = \int du_1^{\alpha}\;\delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(k_1,u_1^{\alpha},\omega_1+p\omega_o/k_2,u_2^{\Lambda},t_2=0)$ (A.II.17)

et le développement :

$$\exp\left\{-\frac{i\vec{k}_1\cdot\vec{\Gamma}_o^{\alpha\Lambda}}{\omega_o^2}\cos\omega_o t_1\right\} = \sum_n I_n^{\alpha\Lambda}(1)\,e^{-in\omega_o t_1} \qquad \text{(A.II.18)}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}_o^{\alpha\Lambda} = \vec{\Gamma}_o^{\alpha} - \vec{\Gamma}_o^{\Lambda}$$

$$I_n^{\alpha\Lambda}(1) = J_n\left(\frac{\vec{k}_1 . \vec{\Gamma}_o^{\alpha\Lambda}}{\omega_o^2}\right) e^{-in\frac{\pi}{2}} \qquad \text{quand} \quad \alpha \neq \Lambda \qquad \text{(A.II.19)}$$

$$I_n^{\alpha\Lambda}(1) = \delta_{np} \qquad \text{quand} \quad \alpha = \Lambda$$

Ici J_n est une fonction de BESSEL d'ordre n et δ_{np} le symbole de KRONECKER.

De la même manière, l'équation (A.II.6) devient :

$$i\left[\omega_1+p\omega_o+\vec{k}_1.\vec{u}_1^{\alpha}\right] \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(k_1,u_i^{\alpha},\omega_1+p\omega_o/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2+q\omega_o) - \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(k_1,u_1^{\alpha},t_1=o/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2+q\omega_o)$$

$$= \omega_p^{\alpha 2} \frac{\partial f_1^{o\alpha}(u_1^{\alpha})}{\partial \vec{u}_1^{\alpha}} \cdot \frac{i\vec{k}_1}{k_1^2} \left\{ G_{pq}^{\alpha\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2) - \sum_n I_{n-p}^{\beta\alpha}(1)\, G_{nq}^{\beta\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2) \right.$$

$$\left. + (-1)^{\delta\Lambda\alpha} \frac{\Delta}{n_o} \sum_n \frac{I_{n-p}^{\Lambda\alpha}(1)}{(\omega_1+n\omega_o+\vec{k}_1.\vec{u}_2^{\Lambda})\,(\omega_2+q\omega_o-\vec{k}_1.\vec{u}_2^{\Lambda})} \right\} \qquad \text{(A.II.20)}$$

où $\alpha \neq \beta$

$\Delta \neq (2\pi)^3\, \delta(k_1+k_2)$

et

$$G_{pq}^{\alpha\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2) = \int du_1^{\alpha}\, \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(k_1,u_1^{\alpha},\omega_1+p\omega_o/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2+q\omega_o) \qquad \text{(A.II.21)}$$

Si nous divisons l'équation (A.II.20) par $i\,(\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}_1^{\alpha})$ et si nous intégrons sur $\vec{u}_1^{\alpha}$, nous obtenons :

$$G_{pq}^{\alpha\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2) = \frac{-i}{D_p^{\alpha}(1)} \int \frac{du_1^{\alpha}\, \delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}(k_1,u_1^{\alpha},t_1=o/k_2,u_2^{\Lambda},\omega_2+q\omega_o)}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

$$+ \frac{\chi_p^{\alpha}(1)}{D_p^{\alpha}(1)} \sum_n I_{n-p}^{\beta\alpha}(1)\, G_{nq}^{\beta\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2 u_2^{\Lambda},\omega_2)$$

$$- \frac{(-1)^{\delta\Lambda\alpha}}{n_o} \frac{\chi_p^{\alpha}(1)}{D_p^{\alpha}(1)} \sum_n \frac{\Delta\, I_{n-p}^{\Lambda\alpha}(1)}{(\omega_1+n\omega_o+\vec{k}_1.\vec{u}_2^{\Lambda})\,(\omega_2+q\omega_o-\vec{k}_1.\vec{u}_2^{\Lambda})} \qquad \text{(A.II.22)}$$

Ci-dessus, χ_p^{α} représente la susceptibilité diélectrique :

$$\chi_p^\alpha(1) \equiv \chi_p^\alpha(k_1,\omega_1) = -\frac{\omega_p^{\alpha 2}}{k_1^2} \int \frac{k_1 \cdot \frac{\partial f_1^{o\alpha}(u)}{\partial \vec{u}}\, du}{\omega_1 + n\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}} \qquad \text{(A.II.23)}$$

$$= -\frac{\omega_p^{\alpha 2}}{k_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial F^\alpha(w)}{\partial w}\, dw}{w + (\omega_1+n\omega_o)/k_1} \qquad \text{pour } \mathrm{Im}\,(\omega_1+n\omega_o) < o$$

$$= -\frac{\omega_p^{\alpha 2}}{k_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial F^\alpha(w)}{\partial w}\, dw}{w + (\omega_1+n\omega_o)/k_1} - \frac{\omega_p^{\alpha 2}}{k_1^2}\, 2i\pi \left[\frac{\partial F(w)}{\partial w}\right]_{w=-\frac{\omega_1+n\omega_o}{k_1}}$$

$$\text{pour } \mathrm{Im}\,(\omega_1+ n\omega_o) > o$$

avec : $$F^\alpha(w) = \int f^{o\alpha}(u)\, \delta\left(w - \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{u}}{k_1}\right) du \qquad \text{(A.II.24)}$$

qui est reliée à la fonction diélectrique

$$D_p^\alpha(1) \equiv D_p^\alpha\,(k_1,\omega_1) = 1 + \chi_p^\alpha(1) \qquad \text{(A.II.25)}$$

Comme $\omega_o \simeq \omega_p^e$ est une très haute fréquence, il est justifié de supposer que les ions répondent faiblement à ω_o et à ses multiples. Par conséquent, la contribution la plus importante provient de $\chi^i(k,\omega) \equiv \chi_o^i(k,\omega)$ et nous supposerons que $\chi_n^i \neq(k,\omega)$ est négligeable dans la suite du calcul.

A partir de l'équation (A.II.22), nous pouvons écrire :

$$G_{p*}^{\alpha\Lambda}\,(k_i,\omega_1/k_2,u_2^\Lambda) = \left[\int \frac{d\Omega_2}{2i\pi}\; e^{i\Omega_2 t}\; G_{pq}^{\alpha\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2 u_2^\Lambda,\omega_2)\right]_{t=o}$$

$$= \frac{\chi_p^\alpha(1)}{D_p^\alpha(1)} \sum_n\; I_{n-p}^{\beta\alpha}(1)\; G_{p*}^{\beta\Lambda}(k_1,\omega_1/k_2,u_2^\Lambda)$$

$$- \frac{(-1)^{\delta\Lambda\alpha_\Delta}}{n_o} \frac{\chi_p^\alpha(1)}{D_p^\alpha(1)} \sum_n\; \frac{i\; I_{n-p}^{\Lambda\alpha}(1)}{\omega_1 + n\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}_2^\Lambda} \qquad \text{(A.II.26)}$$

Dans l'équation ci-dessus, et dans toute la suite, nous négligerons le terme :

$$\delta g_{1/1}^{\alpha\Lambda}\;(k_1,u_1^\alpha,t_1=o/k_2,u_2^\Lambda,t_2=o)$$

en supposant qu'il n'y a pas de corrélation à t = 0.

Si nous prenons successivement $\alpha = \Lambda = e$ et $\alpha = i$, $\Lambda = e$, nous obtenons à partir de (A.II.26) un jeu d'équations couplées pour G^{ee}_{p*} et G^{ie}_{p*}. En utilisant l'hypothèse sur χ^i_n, nous remarquons que le terme G^{ie}_{p*} est négligeable quand $p \neq 0$. Il n'y a donc que G^{ie}_{o*} et G^{ee}_{p*} à calculer.

Après calculs, ces termes s'écrivent :

$$G^{ee}_{p*}(k_1,\omega_1/k_2,u^e_2) = \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} I^{ie}_{-p}(1)\, G^{ie}_{o*}(k_1,\omega_1/k_2,u^e_2) + \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\Delta}{n_o} \frac{i}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}^e_2}$$

et : (A.II.27)

$$G^{ie}_{o*}(k_1,\omega_1/k_2,u^e_2) = -\frac{i\Delta}{n_o} \frac{\chi^i(1)}{K(1)} \sum_n \frac{I^{ei}_n(1)}{D^e_n(1).\left[\omega_1+n\omega_o+\vec{k}_1.\vec{u}^e_2\right]} \qquad \text{(A.II.28)}$$

où : $$K(1) = 1 + \chi^i(1) \sum_n \frac{J^2_n(1)}{D^e_n(1)} \qquad \text{(A.II.29)}$$

est la fonction diélectrique du plasma modifiée par le champ extérieur [10],[12] et $[K(1)/D^i(1)] = 0$ n'est pas autre chose que l'équation de dispersion de SILIN [40].

A partir des équations (A.II.27) et (A.II.28), il vient :

$$G^{ee}_{p*}(k_1,\omega_1/y^e_{10},u^e_{10}) = \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} G^{ie}_{o*}(k_1,\omega_1/y^e_{10},u^e_{10})\, I^{ie}_{-p}(1) + \frac{i}{n_o} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\exp\{-i\vec{k}_1.(\vec{y}^e_1-\vec{u}^e_1 t_1)\}}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1.\vec{u}^e_1} \qquad \text{(A.II.30)}$$

et :

$$G^{ie}_{o*}(k_1,\omega_1/y^e_{10},u^e_{10}) = -\frac{i}{n_o} \frac{\chi^i(1)}{K(1)} \sum_n \frac{I^{ei}_n(1)}{D^e_n(1)} \frac{\exp\{-i\vec{k}_1.(\vec{y}^e_1-\vec{u}^e_1 t_1)\}}{\omega_1 + n\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}^e_1} \qquad \text{(A.II.31)}$$

où le dernier terme de ces deux expressions a été évalué au chapitre IV au moyen de fonctions de probabilité conditionnelle à l'ordre zéro, ce qui suppose que les particules suivent des trajectoires sinusoïdales non-perturbées. Ceci est exprimé dans le repère $(\vec{y}, \vec{u}, \tau)$ par :

$$\begin{cases} \vec{y}^{\Lambda}_{jo} = \vec{y}^{\Lambda}_j - t_j\, \vec{u}^{\Lambda}_j \\ \vec{u}^{\Lambda}_{jo} = \vec{u}^{\Lambda}_j \end{cases} \qquad \text{(A.II.32)}$$

Maintenant à partir de (A.II.16), (A.II.30) et (A.II.31), nous pouvons

écrire :

$$\vec{\mathcal{F}}^{e}_{f}(u^{e}_{1},t_{1}) = - \omega_{p}^{e2} \int \frac{dk_{1}}{(2\pi)^{3}} \frac{d\Omega_{1}}{2\pi} \frac{\vec{k}_{1}}{k_{1}^{2}} \frac{\exp\{i(\Omega_{1}+\vec{k}_{1}.\vec{u}^{e}_{1})t_{1}\}}{n_{o}\, D^{e}_{p}(1)}$$

$$\cdot \frac{\chi^{i}(1)}{K(1)} \left[\sum_{n} \frac{I^{ei}_{n}(1)\; I^{ie}_{-p}(1)}{D^{e}_{n}(1)\; \left[\omega_{1}+n\omega_{o}+\vec{k}_{1}.\vec{u}^{e}_{1}\right]} + \frac{\chi^{e}_{p}(1)}{\omega_{1}+p\omega_{o}+\vec{k}_{1}.\vec{u}^{e}_{1}} \right] \qquad \text{(A.II.33)}$$

A.II.2 - Densité spectrale des fluctuations de densité et termes de diffusion

En généralisant les notations du chapitre IV (formules (4.64) à (4.67)), nous pouvons écrire :

$$Q^{\alpha\Lambda}_{pq}(1,2) \equiv Q^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},\omega_{1};k_{2},\omega_{2}) = V^{2} \int du^{\alpha}_{1}\, du^{\Lambda}_{2}\, P^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},u^{\alpha}_{1},\omega_{1};k_{1},u^{\Lambda}_{2},\omega_{2}) \qquad \text{(A.II.34)}$$

où la fonction de corrélation P est définie par :

$$D^{\alpha\Lambda}(\xi_{1},t_{1};\xi_{2},t_{2}) = D^{\alpha}(\xi_{1},t_{1})\; D^{\Lambda}(\xi_{2},t_{2}) + P^{\alpha\Lambda}(\xi_{1},t_{1};\xi_{2},t_{2})$$

et s'écrit, au premier ordre :

$$P^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},u^{\alpha}_{1},\omega_{1};k_{2},u^{\Lambda}_{2},\omega_{2}) = \frac{1}{V^{2}}\, f^{o\Lambda}_{1}(u^{\Lambda}_{2})\; \delta g^{\alpha\Lambda}_{1/1}(k_{1},u^{\alpha}_{1},\omega_{1}+p\omega_{o}/k_{2},u^{\Lambda}_{2},\omega_{2}+q\omega_{o}) \qquad \text{(A.II.35)}$$

Nous pouvons noter que $Q^{\alpha\Lambda}_{pq}$ est relié à la densité spectrale $S^{\alpha\Lambda}_{pq}$ des fluctuations de densité par la relation bien connue [36],[37] :

$$S^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},\omega_{1};k_{2},\omega_{2}) = n_{o}^{2} Q^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},\omega_{1};k_{2},\omega_{2}) + n_{o}\, \delta_{\alpha\Lambda} \int du\, f^{\alpha}_{1}(u,\omega_{1}) \qquad \text{(A.II.36)}$$

où :

$$S^{\alpha\Lambda}_{pq}(k_{1},\omega_{1};k_{2},\omega_{2}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} dx_{1}\, dx_{2} \iint_{o}^{+\infty} dt_{1}\, dt_{2}\, \exp\left[-i(\vec{k}_{1}.\vec{x}_{1}+\vec{k}_{2}.\vec{x}_{2}+\Omega_{1}t_{1}+\Omega_{2}t_{2})\right]$$

$$\cdot \iint du_{1}\, du_{2} < \delta n^{\alpha}(\vec{x}_{1},\vec{u}_{1},t_{1})\; \delta n^{\Lambda}(\vec{x}_{2},\vec{u}_{2},t_{2}) > \qquad \text{(A.II.37)}$$

Par conséquent, pour connaître les $S^{\alpha\Lambda}_{pq}$, il nous suffit de calculer les quantités $Q^{\alpha\Lambda}_{pq}$. L'équation gouvernant les $Q^{\alpha\Lambda}_{pq}$ est obtenue en multipliant l'équation (A.II.22) par $f^{o\Lambda}_{1}(u^{\Lambda}_{2})$ et en intégrant sur $\vec{u}^{\Lambda}_{2}$. Nous obtenons alors :

$$Q^{\alpha\Lambda}_{pq}(1,2) = \frac{-i}{D^{\alpha}_{p}(1)} \int \frac{du^{\alpha}_{1}\ f^{o\alpha}_{1}(u^{\alpha}_{1})\ G^{\Lambda\alpha}_{q*}(k_2,\omega_2/k_1,u^{\alpha}_{1})}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}^{\alpha}_{1}}$$

$$+ \frac{\chi^{\alpha}_{p}(1)}{D^{\alpha}_{p}(1)} \sum_n I^{\beta\alpha}_{n-p}(1)\ Q^{\beta\Lambda}_{nq}(1,2) - \frac{(-1)^{\delta_{\Lambda\alpha}}\ \Delta}{n_o} \frac{\chi^{\alpha}_{p}(1)}{D^{\alpha}_{p}(1)} \sum_n I^{\Lambda\alpha}_{n-p}(1)\ U^{\Lambda}_{n\,q}(1,2)$$

(A.II.38)

où nous avons posé :

$$U^{\alpha}_{ns}(1,2) = \frac{U^{\alpha}_{n}(1) + U^{\alpha}_{s}(2)}{\omega_1 + \omega_2 + (n+s)\ \omega_o} \qquad \text{(A.II.39)}$$

les fonctions U^{α}_{n} sont les intégrales usuelles [30] :

$$U^{\alpha}_{n}(1) \equiv U^{\alpha}_{n}(k_1,\omega_1) = \int \frac{du\ f^{o\alpha}_{1}(u)}{\omega_1+n\omega_o+\vec{k}_1.\vec{u}} \qquad \text{(A.II.40)}$$

$$= \int \frac{dw\ F^{\alpha}(w)}{\omega_1+n\omega_o+k_1\ w} \qquad \text{pour} \quad Im(\omega_1+n\omega_o) < o$$

$$= \int \frac{dw\ F^{\alpha}(w)}{\omega_1+n\omega_o+k_1\ w} + \frac{2i\pi}{k_1} F^{\alpha}\left[-\frac{\omega_1+n\omega_o}{k_1}\right] \quad \text{pour} \quad Im(\omega_1+n\omega_o)>o$$

Commençons maintenant par calculer Q^{ii}_{pq} et Q^{ei}_{pq} qui sont couplés par l'équation (A.II.38) :

$$Q^{ii}_{pq}(1,2) = -\frac{i}{D^{i}_{p}(1)} \int \frac{du^{i}_{1}\ f^{oi}_{1}(u^{i}_{1})\ G^{ii}_{q*}(k_2,\omega_2/k_1,u^{i}_{1})}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}^{i}_{1}} + \frac{\chi^{i}_{p}(1)}{D^{i}_{p}(1)} \sum_n I^{ei}_{n-p}(1)\ Q^{ei}_{nq}(1,2)$$

$$+ \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^{i}_{p}(1)}{D^{i}_{p}(1)} U^{i}_{pq}(1,2) \qquad \text{(A.II.41)}$$

$$Q^{ei}(1,2) = \frac{-i}{D^{e}_{p}(1)} \int \frac{du^{e}_{1}\ f^{oe}_{1}(u^{e}_{1})\ G^{ie}_{q*}(k_2,\omega_2/k_1,u^{e}_{1})}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1 \cdot \vec{u}^{e}_{1}} + \frac{\chi^{e}_{p}(1)}{D^{e}_{p}(1)} \sum_n I^{ie}_{n-p}(1)\ Q^{ii}_{nq}(1,2)$$

$$- \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^{e}_{p}(1)}{D^{e}_{p}(1)} \sum_n I^{ie}_{n-p}(1)\ U^{i}_{nq}(1,2)$$

(A.II.42)

Il est donc nécessaire de connaître G^{ii}_{q*} et G^{ie}_{q*}. Ce dernier terme a déjà été calculé (voir équation A.II.28). De la même manière nous obtenons :

$$G^{ii}_{o*}(k_2,\omega_2/k_1u^i_1) = \frac{\chi^i(2)}{K(2)}\frac{i\Delta}{n_o}\left\{\frac{1}{\omega_2-\vec{k}_1.\vec{u}^i_1} - \sum_{n,s}\frac{I^{ei}_n(2)\ I^{ie}_{s-n}(2)\ \chi^e_n(2)}{D^e_n(2)\ [\omega_2+s\omega_o-\vec{k}_1.\vec{u}^i_1]}\right\} \qquad \text{(A.II.43)}$$

En ce qui concerne G^{ii}_{p*} pour $p \neq 0$, il est négligeable.

Etant donné les valeurs de G^{ii}_{q*} et χ^i_p suivant les valeurs de p et q, on trouve :

. Q^{ii}_{pq} est négligeable pour $p \neq 0$ et $q \neq 0$ (A.II.44)

$$. \underset{p\neq o}{Q^{ii}_{po}}(1,2) = \frac{\Delta}{n_o}\frac{\chi^i(2)}{K(2)}\left\{U^i_{po}(1,2) - \sum_{r,s} I^{ei}_r(2)\ \underset{s-r}{I^{ie}}(2)\ \frac{\chi^e_r(2)}{D^e_r(2)}\ U^i_{ps}(1,2)\right\} \qquad \text{(A.II.45)}$$

et :

$$.Q^{ii}_{oo}(1,2) = -\frac{\Delta}{n_o}\frac{\chi^i(1)\chi^i(2)}{K(1)\ K(2)}\sum_{n,s} I^{ei}_n(1)\ I^{ei}_s(2)\ \frac{U^e_{ns}(1,2)}{D^e_n(1)D^e_s(2)} + \frac{\Delta}{n_o}\left[1-\frac{1}{K(1)\ K(2)}\right]U^i_{oo}(1,2)$$

$$- \frac{\Delta}{n_o}\frac{\chi^i(1)\ \chi^i(2)}{K(1)\ \ K(2)}\sum_{\substack{n\\ s\neq o}}\left\{I^{ei}_n(1)\ I^{ie}_{s-n}(1)\ \frac{\chi^e_n(1)}{D^e_n(1)}\ \frac{U^i_{so}(1,2)}{\chi^i(2)}\right.$$

$$\left. + I^{ei}_n(2)\ I^{ie}_{s-n}(2)\ \frac{\chi^e_n(2)}{D^e_n(2)}\ \frac{U^i_{os}(1,2)}{\chi^i(1)}\right\}$$

$$- \frac{\Delta}{n_o}\frac{\chi^i(1)\ \chi^i(2)}{K(1)\ \ K(2)}\sum_{\substack{n,r\\ s\neq o\\ p\neq o}} I^{ei}_n(1)\ I^{ie}_{p-n}(1)\ I^{ei}_r(2)\ \underset{s-r}{I^{ei}}(2)\ \frac{\chi^e_n(1)\ \chi^e_r(2)}{D^e_n(1)\ D^e_r(2)}\ U^i_{ps}(1,2)$$

(A.II.46)

De la même manière les expressions pour Q^{ei}_{pq} s'écrivent

$$\underset{q\neq o}{Q^{ei}_{pq}}(1,2) = \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)}\ \underset{-p}{I^{ie}}(1)\ Q^{ii}_{oq}(1,2) - \frac{\Delta}{n_o}\frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)}\sum_s \underset{s-p}{I^{ie}}(1)\ U^i_{sq}(1,2) \qquad \text{(A.II.47)}$$

et :

$$Q^{ei}_{po}(1,2) = - \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^i(2)}{D^e_p(1)\, K(2)} \sum_n \frac{I^{ei}_n(2)}{D^e_n(2)} U^e_{pn}(1,2)$$

$$+ \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \left\{ \sum_{n \neq o} I^{ie}_{n-p}(1)\, Q^{ii}_{no}(1,2) + I^{ie}_{-p}(1)\, Q^{ii}_{oo}(1,2) \right\}$$

$$- \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \sum_n I^{ie}_{n-p}(1)\, U^i_{no}(1,2) \qquad \text{(A.II.48)}$$

La diffusion incohérente des ondes par les particules du plasma, est gouvernée par les fluctuations des densités électroniques. Par conséquent, il est d'un grand intérêt d'étudier la densité spectrale des fluctuations de densité électron-électron S^{ee}_{pq} qui est reliée à Q^{ee}_{pq} par (A.II.36). Pour obtenir Q^{ee}_{pq} il est nécessaire de substituer (A.II.27), (A.II.28) et (A.II.48) dans (A.II.38) :

$$Q^{ee}_{pq}(1,2) = - \frac{\Delta}{n_o} \frac{1}{D^e_p(1)} \frac{\chi^e_q(2)}{D^e_q(2)} \frac{\chi^i(2)}{K(2)} I^{ie}_{-q}(2) \sum_n \frac{I^{ei}_n(2)}{D^e_n(2)} U^e_{pn}(1,2)$$

$$- \frac{\Delta}{n_o} \frac{1}{D^e_q(2)} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\chi^i(1)}{K(1)} I^{ie}_{-p}(1) \sum_n \frac{I^{ei}_n(1)}{D^e_n(1)} U^e_{nq}(1,2)$$

$$+ \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1) + \chi^e_q(2) + \chi^e_p(1)\, \chi^e_q(2)}{D^e_p(1)\, D^e_q(2)} U^e_{pq}(1,2)$$

$$- \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\chi^e_q(2)}{D^e_q(2)} \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\, I^{ie}_{s-q}(2)\, U^i_{ns}(1,2)$$

$$+ \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\chi^e_q(2)}{D^e_q(2)} \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\, I^{ie}_{s-q}(2)\, Q^{ii}_{ns}(1,2) \qquad \text{(A.II.49)}$$

où les termes Q^{ii}_{pq} sont donnés par (A.II.44) à (A.II.46).

Nous venons de calculer les termes $Q^{\alpha\Lambda}_{pq}$ qui vont nous permettre d'obtenir les termes de diffusion $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ee}$ et $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ei}$. En effet, on obtient à partir de (A.II.10) et (A.II.11) :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{\alpha\Lambda}(u_1^\alpha,t_1) = \omega_p^{e4}\int_{-t_1}^{o} d\sigma \int \frac{dk_1\ dk_2}{(2\pi)^6} \exp\left\{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2).\vec{y}_1^\alpha\right\} \frac{.\vec{k}_1\ \vec{k}_2.}{k_1^2\ k_2^2}$$

$$. \int \frac{d\Omega_1\ d\Omega_2}{(2\pi)^2} \exp\left\{i[\Omega_1 t_1+\Omega_2(t_1+\sigma)]\right\} . \exp\{i\vec{k}_2.\vec{u}_1^\alpha\ \sigma\} . \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{\alpha\Lambda}(u_1^\alpha;1,2) \qquad \text{(A.II.50)}$$

avec $\Omega_2 = \omega_2 + q\ \omega_o$ et où les termes $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{\alpha\Lambda}$ sont donnés par :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{ee}(u_1^e;1,2) = \frac{\Delta}{n_o} U_{pq}^e(1,2) - Q_{pq}^{ee}(1,2) \qquad \text{(A.II.51)}$$

et :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{ei}(u_1^e;1,2) = \frac{\Delta}{n_o}\sum_{n,s} I_{n-p}^{ie}(1)\ I_{s-q}^{ie}(2)\ U_{ns}^i(1,2) - \sum_{n,s} I_{n-p}^{ie}(1)\ I_{s-q}^{ie}(2)\ Q_{ns}^{ii}(1,2)$$

$$+ \sum_s \left\{ I_{s-q}^{ie}(2)\ Q_{ps}^{ei}(1,2) + I_{s-p}^{ie}(1)\ Q_{sq}^{ie}(1,2) \right\} \qquad \text{(A.II.52)}$$

Il ne reste plus alors, pour connaître $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{ee}$ et $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}_{pq}^{ei}$, qu'à remplacer les différents $Q_{pq}^{\alpha\Lambda}$ par les valeurs que nous avons trouvées.

Pour terminer ce paragraphe, on peut regarder le comportement des densités spectrales quand le champ extérieur E_o est égal à zéro. Ce calcul, fait dans l'annexe III, conduit aux résultats classiques pour un plasma électron-ion sans champ extérieur [36],[37].

A.II.3 - Approximation $m_i \to \infty$

A ce stade, il est intéressant de regarder les termes que nous venons de calculer dans la limite $m_i \to \infty$. Dans ces conditions, χ^i s'annule, K = 1 et le terme de friction devient :

$$\vec{\mathcal{F}}_f^e = \frac{\omega_p^{e2}}{n_o}\int \frac{dk_1}{(2\pi)^3}\frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{\vec{k}_1}{k_1^2}\frac{1}{D_p^e(1)}\frac{\exp\left[i(\Omega_1+\vec{k}_1.\vec{u}_1^e)t_1\right]}{\omega_1 + p\omega_o + \vec{k}_1\ .\ \vec{u}_1^e} \qquad \text{(A.II.53)}$$

Cette dernière expression n'est pas autre chose que le terme de friction déjà obtenu pour un plasma d'électrons (voir équation (4.72)).

Pour $Q_{pq}^{\alpha\Lambda}$, nous obtenons quels que soient p et q :

$$Q_{pq}^{ii}(1,2) = 0 \qquad \text{(A.II.54)}$$

$$Q^{ei}_{pq}(1,2) = - \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \sum_s I^{ie}_{s-p}(1)\ U^i_{sq}(1,2) \qquad \text{(A.II.55)}$$

et :

$$Q^{ee}_{pq}(1,2) = \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1) + \chi^e_q(2) + \chi^e_p(1)\ \chi^e_q(2)}{D^e_p(1)\ D^e_q(2)}\ U^e_{pq}(1,2)$$

$$- \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^e_p(1)}{D^e_p(1)} \frac{\chi^e_q(2)}{D^e_q(2)} \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\ I^{ie}_{s-q}(2)\ U^i_{ns}(1,2) \qquad \text{(A.II.56)}$$

Alors, en utilisant les équations (A.II.51) et (A.II.52), nous obtenons pour $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ee}_{pq}$ et $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ei}_{pq}$:

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ee}_{pq}(u^e_1;1,2) = \frac{\Delta}{n_o} U^e_{pq}(1,2) - Q^{ee}_{pq}(1,2)$$

$$= \frac{\Delta}{n_o} \left\{ U^e_{pq}(1,2) \frac{1}{D^e_p(1)\ D^e_q(2)} + \frac{\chi^e_p(1)\ \chi^e_q(2)}{D^e_p(1)\ D^e_q(2)} \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(2)\ I^{ie}_{s-q}(2)\ U^i_{ns}(1,2) \right\}$$

(A.II.57)

et :

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ei}_{pq}(u^e_1;1,2) = \frac{\Delta}{n_o} \frac{1-\chi^e_p(1)\chi^e_q(2)}{D^e_p(1)\ D^e_q(2)} \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\ I^{ie}_{s-q}(2)\ U^i_{ns}(1,2) \qquad \text{(A.II.58)}$$

Finalement, nous pouvons écrire le terme de diffusion $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^e$:

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e}_{pq}(u^e_1;1,2) = \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ee}_{pq} + \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{ei}_{pq}$$

$$= \frac{\Delta}{n_o\ D^e_p(1)\ D^e_q(2)} \left\{ U^e_{pq}(1,2) + \sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\ I^{ie}_{s-q}(2)\ U^i_{ns}(1,2) \right\}$$

$$= \overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e*}_{pq}(u^e_1;1,2) + \delta\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e}_{pq}(u^e_1;1,2) \qquad \text{(A.II.59)}$$

où : $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e*}_{pq}(u^e_1;1,2) = \frac{\Delta}{n_o} \frac{U^e_{pq}(1,2)}{D^e_p(1)\ D^e_q(2)}$

est la transformée de FOURIER-LAPLACE du terme de diffusion déjà trouvé pour un plasma d'électrons (équation : 4.79) et où :

$$\delta\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e}_{pq}(u^{e}_{1};1,2) = \frac{\Delta}{n_o}\,\frac{1}{D^{e}_{p}(1)\;D^{e}_{q}(2)}\sum_{n,s} I^{ie}_{n-p}(1)\;I^{ie}_{s-q}(2)\;U^{i}_{ns}(1,2)$$

représente l'effet des ions immobiles sur le terme de diffusion.

Par conséquent, si l'on compare les résultats trouvés pour un plasma d'électrons (chapitre IV), et ceux trouvés ici, on peut noter que l'introduction des ions, considérés comme un ensemble de particules immobiles et non comme un fond uniforme, ne change pas le terme de friction par polarisation $\vec{\mathfrak{F}}^{e}_{f}$ mais modifie le terme de diffusion $\overleftrightarrow{\mathfrak{D}}^{e}$. Ceci n'est pas surprenant, car dans ce présent chapitre les ions qui sont immobiles ne peuvent pas réagir à l'action de la particule test et par conséquent ne contribuent pas à la polarisation. D'un autre côté, ce sont des charges discrètes qui participent à l'amortissement résultant des corrélations des forces sur la particule test à différents temps et modifient alors le terme de diffusion.

ANNEXE III

Regardons maintenant le comportement des densités spectrales quand le champ extérieur E_o est égal à zéro.

Tout d'abord, nous pouvons noter que :

$$J_n\left(\frac{\vec{k}_1 . \vec{r}_o^{\alpha\Lambda}}{\omega_o^2}\right) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq 0 \\ 1 & \text{pour } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(A.III.1)}$$

quand $E_o \to 0$.

Alors, la fonction diélectrique non-linéaire K devient :

$$K(1) = 1 + \chi^i \sum_n \frac{J_n^2(1)}{D_n^e(1)} \longrightarrow 1 + \frac{\chi^i(1)}{D^e(1)}$$

$$= \frac{D(1)}{D^e(1)} \qquad \text{(A.III.2)}$$

où : $$D(1) = 1 + \chi^i(1) + \chi^e(1) \qquad \text{(A.III.3)}$$

est la fonction diélectrique totale du plasma.

En utilisant les remarques ci-dessus, nous obtenons immédiatement à partir de (A.II.46) et (A.II.49) :

$$Q_{oo}^{\alpha\alpha}(1,2) = -\frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^\alpha(1)\,\chi^\alpha(2)}{D(1)\,D(2)} \left[U_{oo}^{\beta}(1,2) + U_{oo}^{\alpha}(1,2) \right]$$

$$+ \frac{\Delta}{n_o} \frac{\chi^\alpha(1)\,D(2) + \chi^\alpha(2)\,D(1)}{D(1)\,D(2)}\, U_{oo}^{\alpha}(1,2) \qquad \text{(A.III.4)}$$

avec $\alpha \neq \beta$, et :

$$U_{oo}^{\alpha}(1,2) = \frac{U_o^\alpha(1) + U_o^\alpha(2)}{\omega_1 + \omega_2}$$

Souvenons nous que :

$$Q^{\alpha\alpha}(y_1,t_1;y_2,t_2) = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \exp\left\{ i(\vec{k}_1,\vec{y}_1 + \vec{k}_2,\vec{y}_2 + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2) \right\}$$

$$\cdot\, Q_{oo}^{\alpha\alpha}(k_1,\omega_1;k_2,\omega_2) \qquad \text{(A.III.5)}$$

Comme cela se fait habituellement dans le cas $E_o \to 0$, nous allons supposer que toutes les singularités de [1/D] sont amorties exponentiellement quand $t \to \infty$ et que la seule contribution qui reste provient de $\omega_1 + \omega_2 = 0$. Alors, nous obtenons pour $Q^{\alpha\alpha}$ la forme asymptotique suivante :

$$\lim_{t_1 \to \infty} Q^{\alpha\alpha}(y_1,t_1;y_2,t_1+\sigma) = i \int \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left|i(\vec{k}.\vec{y}+\omega\sigma)\right| Q^{\alpha\alpha}(k,\omega)$$

où $y = y_2 - y_1$ et où :

$$Q^{\alpha\alpha}(k,\omega) = \frac{2\pi}{n_o k} \sum_{\Lambda=\alpha,\beta} \frac{|\chi^{\Lambda}(k,\omega)|^2}{|D(k,\omega)|^2} F^{\Lambda}\left(-\frac{\omega}{k}\right) - \frac{2\pi}{n_o k} \cdot \frac{2\,\mathrm{Re}\left[\chi^{\alpha}(k,\omega)\ D(k,\omega)\right]}{|D(k,\omega)|^2} F^{\alpha}\left(-\frac{\omega}{k}\right) \qquad \text{(A.III.6)}$$

Nous avons utilisé les relations suivantes [38] :

$$\chi^{\alpha}(k,\omega) = \chi^{\alpha *}(-k,-\omega) \qquad \text{(A.III.7)}$$

$$U^{\alpha}(k,\omega) + U^{\alpha}(-k,-\omega) = 2i\pi\ F^{\alpha}\left(-\frac{\omega}{k}\right) \qquad \text{(A.III.8)}$$

avec F^{α} donné par l'équation (A.II.24).

Finalement, si nous reportons (A.II.6) dans (A.II.36) nous obtenons les densités spectrales des fluctuations de densité quand $E_o \to 0$. Ce résultat n'est pas autre chose que le résultat classique pour un plasma électron-ion sans champ extérieur [36].

REFERENCES

[1] FAUQUIGNON C., FLOUX F.
Hydrodynamic behavior of solid deuterium under laser heating
Phys. of Fluids 13, (1970), pp. 386-391

[2] BOBIN J.L., DELOBEAU F., DE GIOVANNI G., FAUQUIGNON C., FLOUX F.
Temperature in laser-created deuterium plasmas
Nuclear Fusion 9, (1969), pp. 115-120

[3] BOBIN J.L., FLOUX F.
Réactions nucléaires de fusion dans les plasmas créés au moyen du laser
Rapport CEA-R-4255, (1971)

[4] DELCROIX J.L.
Physique des plasmas
Tome 1, Dunod, Paris (1963)

[5] ROSTOKER N., ROSENBLUTH M.N.
Test particle in a completely ionized plasma
Phys. of Fluids 3, (1960) pp. 1-14.

[6] ROSTOKER N.
Test particles method in kinetic theory of a plasma
Phys. of Fluids 7, (1964), pp. 491-498

[7] JACKSON E.A.
Parametric effects of radiation on a plasma
Phys. Rev. 153,(1967), pp. 235-244

[8] DUBOIS D.F., GOLDMAN M.V.
Parametrically excited plasma fluctuations
Phys. Rev. 164, (1967), pp. 207-222

[9] SALAT A., KAW P.K.
Non-linear H.F. plasma conductivity
Phys. of Fluids 12, (1969), pp. 342-344

[10] KAW P.K., DAWSON J.M.
External control of ion waves in a plasma by H.F. fields
Phys. of Fluids 14, (1971), pp. 792-794

[11] SILIN V.P.
Contribution to the theory of parametric interaction between an ultra-high frequency field and plasma
Zurn. Eksp. Teor. Fiz. 57, (1969), pp. 183-195
Sov. Phys. JETP 30, (1970), pp. 105-110

[12] SANMARTIN J.R.
Ion correlations due to a H.F. electric field and their effects on the non-linear plasma conductivity
Phys. of Fluids 13, (1970), pp. 1223-1229

[13] ROSTOKER N.
Fluctuations of a plasma
Nuclear fusion 1, (1961), pp. 101-120

[14] MEERON E.
Transport equations for plasmas in strong external fields
Phys. Rev. 124, (1961), pp. 308-310

[15] STRATONOVICH R.L.
Topics in the theory of random noise
Ed. Gordon and Breach - New York (1963)

[16] SO K.C.
Generalized stochastic equations and their applications to plasma
Ph. D. Univ. of Illinois (1967)
Non publiée

SO K.C., YEH K.C.
Generalized stochastic equations
J. Phys. A (Proc. PHys. Soc.) 1, (1968), pp. 447-454

[17] OGUNLANA J.
Stochastic kinetic theory and turbulent heating
Nuovo Cimento 69B, (1970), pp. 20-40

[18] Di BONA G., MASSELOT C.
Stochastic kinetic theory of strong Wave-Plasma Interaction
Lettere al Nuovo Cimento 1, (1971), pp. 1124-1126

[19] CHANDRASEKHAR S.
Principles of stellar dynamics
Ed. Univ. of Chicago Press - Chicago (1942)

CHANDRASEKHAR S.
Astrophys. J., 97, (1943), 255

[19] SPITZER L.
Physique des gaz complètement ionisés
Ed. Dunod - Paris (1959)

[20] Di BONA G., MASSELOT C.
Stochastic kinetic theory of strong wave-plasma
Interaction - I - Kinetic Equations
Nuovo Cimento 12B, (1972), pp. 256-268

[21] MASSELOT C., Di BONA G.
Stochastic kinetic theory for plasma in strong
Electromagnetic fields - II - Friction and diffusion terms
à paraître Nuovo Cimento B

[22] Di BONA G., MASSELOT C.
Theorie cinétique stochastique de l'interaction d'un plasma d'électrons
avec une onde électromagnétique intense
Rapport CEA-R-4375, (1972)

[23] HUBBARD J.
The friction and diffusion coefficient of the FOKKER-PLANCK equation in
a plasma
Proc. Roy. Soc. (London) A260, (1961), pp. 114-126

[24] BALESCU R., MISGUICH J.H.
Mécanique statistique des systèmes non-uniformes soumis à un champ extérieur
arbitraire et dépendant du temps.
Rapport EUR-CEA-FC-691, mai 1973

[25] DOOB J.L.
Stochastic processes
Ed. J. Wiley - New York (1953)

[26] LUMLEY J.L.
Stochastic tools in turbulence
Ed. Academic Press - New York (1970)

[27] a) GIRAULT M.
Calcul des probabilités en vue des applications
Ed. Dunod - Paris (1960)

b) TORTRAT A.
Calcul des probabilités
Ed. Masson - Paris (1963)

[28] FRIEMAN E.A.
On a new method in the theory of irreversible processes
J. Math. Phys. 4, (1963), pp. 410-418

[29] ECKER G.
Theory of fully ionized plasmas
Ed. Academic Press - New York (1972)

[30] LIBOFF R.L.
Introduction to the theory of kinetic equations
Ed. John Wiley - New York (1969)

[31] MONTGOMERY D.
Foundations of kinetic theory
dans "Lectures in theoretical physics" ed. par W.E. BRITTIN,
Ed. Gordon and Breach - New York (1967), Vol. 9C

[32] YVON J.
Les corrélations et l'entropie en mécanique statistique classique
Ed. Dunod - Paris (1966)

[33] GASIOROWICZ S., NEUMAN M., RIDDEL Jr. R.J.
Dynamics of Ionized Media
Phys. Rev. 101, (1956), pp. 922-934

[34] TCHEN C.M.
Kinetic equation for a plasma with unsteady correlations
Phys. Rev. 114, (1959), pp. 394-411

[35] SILIN V.P.
Non-linear H.F. plasma conductivity
Zurn. Eksp. Teor. Fiz. 47, (1964), pp. 2254-2265
Sov. Phys. JETP 20, (1965), pp. 1510-1516

[36] MONTGOMERY D.C.
Theory of unmagnetized plasma
Ed. Gordon and Breach - New York (1971)

[37] WU C.S.
Plasma kinetic theory in the KLIMONTOVICH formalism
dans "Lectures in Theoretical Physics" ed. par W.E. BRITTIN
Ed. Gordon and Breach - New York (1967) Vol. 9C

[38] MONTGOMERY D.C., TIDMAN D.A.
Plasma Kinetic Theory
Ed. Mc Graw Hill - New York (1964)

[39] Di BONA G., MASSELOT C.
Stochastic kinetic theory for electron-ion plasma in strong electromagnetic fields
Communication au Congrès International "Waves and Instabilities in Plasmas"
Innsbruck, Autriche (2 avril 1973)

[40] SILIN V.P.
A survey of phenomena in ionized gases
IAEA, Vienna (1968) p. 205

Manuscrit reçu le 12 novembre 1973

Vu et approuvé

ORSAY, le 16 octobre 1973

Le Vice-Président du Centre d'Orsay

M. STEINBERG.